TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos** 7/Dezembro/2005

PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Três raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 36 **(D)** 48

2. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (*Espadas*, *Copas*, *Ouros* e *Paus*). Em cada naipe há um *Ás*, três figuras (*Rei*, *Dama* e *Valete*) e mais nove cartas (do *Dois* ao *Dez*).

A Joana pretende fazer uma sequência com **seis** cartas do naipe de *Espadas*.
Ela quer iniciar a sequência com o *Ás*, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com duas das nove restantes cartas desse naipe.

Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?

(A) 416 **(B)** 432 **(C)** 528 **(D)** 562

3. De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros termos é 21.

Qual é o maior termo dessa linha?

(A) $169\,247$ **(B)** $175\,324$ **(C)** $184\,756$ **(D)** $193\,628$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 9$.

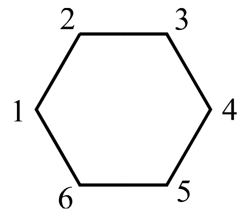
No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são $-4, \ -2, \ 0, \ 2$ e 4.

Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos.

Qual é a probabilidade de esse segmento intersectar o eixo das abcissas?

(A) $0{,}4$ **(B)** $0{,}5$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}7$

5. Na figura está representado um hexágono regular com os vértices numerados de 1 a 6.



Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
Em cada lançamento, selecciona-se o vértice do hexágono que corresponde ao número saído nesse lançamento.

Note que, no final da experiência, podemos ter um, dois ou três pontos seleccionados (por exemplo: se sair o mesmo número três vezes, só é seleccionado um ponto).

Qual é a probabilidade de se seleccionarem três pontos que sejam os vértices de um triângulo equilátero?

(A) $\frac{1}{18}$ **(B)** $\frac{1}{16}$ **(C)** $\frac{1}{14}$ **(D)** $\frac{1}{12}$

6. O João vai lançar seis mil vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e vai adicionar os números saídos.

De qual dos seguintes valores é de esperar que a soma obtida pelo João esteja mais próxima?

(A) $20\,000$ **(B)** $21\,000$ **(C)** $22\,000$ **(D)** $23\,000$

7. Admita que a variável *peso*, em quilogramas, das raparigas de 15 anos, de uma certa escola, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 40.

Sabe-se ainda que, nessa escola, 20% das raparigas de 15 anos pesam mais de 45 Kg.

Escolhida, ao acaso, uma rapariga de 15 anos dessa escola, qual é a probabilidade de o seu peso estar compreendido entre 35 Kg e 40 Kg ?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}25$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}35$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja C o conjunto de todos os números naturais com três algarismos (ou seja, de todos os números naturais de 100 a 999).

1.1. Quantos elementos do conjunto C são múltiplos de 5?

1.2. Quantos elementos do conjunto C têm os algarismos todos diferentes?

2.

2.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$, com $P(A) > 0$.
Sejam $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente.
Seja $P(B|A)$ a probabilidade de B, se A.

Mostre que: $$\frac{P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

2.2. Próximo de uma praia portuguesa, realiza-se um acampamento internacional de juventude, no qual participam jovens de ambos os sexos.

Sabe-se que:
- a quarta parte dos jovens são portugueses, sendo os restantes estrangeiros;
- 52% dos jovens participantes no acampamento são do sexo feminino;
- considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 5 são rapazes.

No último dia, a organização vai sortear um prémio, entre todos os jovens participantes no acampamento.

Qual é a probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: se o desejar, pode utilizar a igualdade da alínea anterior (nesse caso, comece por identificar claramente, no contexto do problema, os acontecimentos A e B); no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo (como, por exemplo, através de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama em árvore).

3. Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e três bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém duas bolas pretas e uma bola verde.

3.1. Considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa. Seja X a variável aleatória «*número de bolas verdes que existem no conjunto das duas bolas retiradas*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

3.2. Considere agora que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência:

- ao acaso, retiram-se simultaneamente três bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2;
- em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam os acontecimentos:
A: «as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»;
B: «as duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes».

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(B|A)$, apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de $P(B|A)$, no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

3.3. Considere agora que, na caixa 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais n bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com duas bolas pretas, uma bola verde e n bolas amarelas.

Considere a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa.

Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e a outra ser verde é $\frac{5}{39}$, determine o valor de n.

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada.. 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 36
1.1. 18
1.2. 18

2. 38
2.1. 20
2.2. 18

3. 63
3.1. 20
3.2. 20
3.3. 23

TOTAL **200**