gabinete de avaliação educacional

Ministério da Educação

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos** 7/Dezembro/2005

PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA

VERSÃO 2

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros termos é 17.

Qual é o maior termo dessa linha?

(A) $12\,870$ **(B)** $13\,102$ **(C)** $14\,224$ **(D)** $15\,070$

2. Quatro raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?

(A) 48 **(B)** 128 **(C)** 384 **(D)** 512

3. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (*Espadas*, *Copas*, *Ouros* e *Paus*). Em cada naipe há um *Ás*, três figuras (*Rei*, *Dama* e *Valete*) e mais nove cartas (do *Dois* ao *Dez*).

A Joana pretende fazer uma sequência com **oito** cartas do naipe de *Copas*.
Ela quer iniciar a sequência com o *Ás*, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com quatro das nove restantes cartas desse naipe.

Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?

(A) $15\,080$ **(B)** $16\,232$ **(C)** $17\,343$ **(D)** $18\,144$

4. Admita que a variável *altura*, em centímetros, das raparigas de 14 anos, de uma certa escola, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 160.

Sabe-se ainda que, nessa escola, 15% das raparigas de 14 anos têm menos de 150 cm de altura.

Escolhida, ao acaso, uma rapariga de 14 anos dessa escola, qual é a probabilidade de a sua altura estar compreendida entre 160 cm e 170 cm?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}25$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}35$

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 1$.

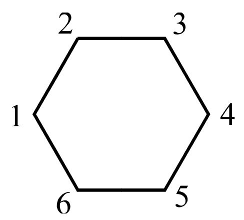
No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são $-4,\ -2,\ 0,\ 2$ e 4.

Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos.

Qual é a probabilidade de esse segmento intersectar o eixo das abcissas?

(A) $0{,}3$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}6$

6. Na figura está representado um hexágono regular com os vértices numerados de 1 a 6.



Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
Em cada lançamento, selecciona-se o vértice do hexágono que corresponde ao número saído nesse lançamento.

Note que, no final da experiência, podemos ter um ou dois pontos seleccionados (por exemplo: se sair o mesmo número nos dois lançamentos, só é seleccionado um ponto).

Qual é a probabilidade de se seleccionarem dois pontos que sejam os extremos de um diâmetro da circunferência circunscrita ao hexágono?

(A) $\frac{1}{10}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

7. O João vai lançar doze mil vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e vai adicionar os números saídos.

De qual dos seguintes valores é de esperar que a soma obtida pelo João esteja mais próxima?

(A) $42\,000$ **(B)** $40\,000$ **(C)** $38\,000$ **(D)** $36\,000$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1.

1.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$, com $P(B) > 0$.

Sejam $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente.

Seja $P(A|B)$ a probabilidade de A, se B.

Mostre que: $$\frac{P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

1.2. Próximo de uma praia portuguesa, realiza-se um acampamento internacional de juventude, no qual participam jovens de ambos os sexos.

Sabe-se que:
- a quinta parte dos jovens são portugueses, sendo os restantes estrangeiros;
- 54% dos jovens participantes no acampamento são do sexo feminino;
- considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 4 são rapazes.

No último dia, a organização vai sortear um prémio, entre todos os jovens participantes no acampamento.

Qual é a probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: se o desejar, pode utilizar a igualdade da alínea anterior (nesse caso, comece por identificar claramente, no contexto do problema, os acontecimentos A e B); no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo (como, por exemplo, através de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama em árvore).

2. Seja C o conjunto de todos os números naturais com quatro algarismos (ou seja, de todos os números naturais de 1000 a 9999).

2.1. Quantos elementos do conjunto C são múltiplos de 5?

2.2. Quantos elementos do conjunto C têm os algarismos todos diferentes?

3. Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e quatro bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém três bolas pretas e uma bola verde.

3.1. Considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa. Seja X a variável aleatória «*número de bolas verdes que existem no conjunto das duas bolas retiradas*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

3.2. Considere agora que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência:

- ao acaso, retiram-se simultaneamente quatro bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2;
- em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam os acontecimentos:
A: «as quatro bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»;
B: «as duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes».

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(B|A)$, apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de $P(B|A)$, no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

3.3. Considere agora que, na caixa número 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais n bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com três bolas pretas, uma bola verde e n bolas amarelas.

Considere a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa.

Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e a outra ser verde é $\frac{3}{26}$, determine o valor de n.

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 38
1.1. 20
1.2. 18

2. 36
2.1. 18
2.2. 18

3. 63
3.1. 20
3.2. 20
3.3. 23

TOTAL **200**