

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

7 de Dezembro de 2005

RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

Grupo I

1. ${}^{16}C_8 = 12\,870$ Resposta **A**

2. $4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$ Resposta **C**

3. $1 \times 3! \times {}^9A_4 = 1 \times 6 \times 3024 = 18\,144$ Resposta **D**

4. $0,5 - 0,15 = 0,35$ Resposta **D**

5. $\frac{4 \times 1}{{}^5C_2} = 0,4$ Resposta **B**

6. $\frac{3 \times 2!}{6^2} = \frac{1}{6}$ Resposta **C**

7. Distribuição de probabilidades associada à variável aleatória X : «Número saído no lançamento de um dado»:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Média da variável aleatória X :

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

3,5 é o número médio (esperado) de pontos, por lançamento.

$3,5 \times 12\,000 = 42\,000$ Resposta **A**

Grupo II

1.

$$\begin{aligned} 1.1. \quad \frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(B)} &= \frac{1 - P(A) - P(\overline{A \cup B})}{P(B)} = \\ &= \frac{1 - P(A) - [1 - P(A \cup B)]}{P(B)} = \frac{1 - P(A) - 1 + P(A \cup B)}{P(B)} = \\ &= \frac{-P(A) + P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{-P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B) \end{aligned}$$

1.2. Do enunciado, sabemos que, considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 4 são rapazes. Isto significa que, no universo dos portugueses, a proporção de rapazes é $\frac{3}{4}$, ou seja, designando por B o acontecimento «ser português» e por A o acontecimento «ser rapaz», tem-se que $P(A|B) = \frac{3}{4} = 0,75$

Tem-se também que $P(B) = \frac{1}{5} = 0,2$ e $P(\bar{A}) = 0,54$

Donde, aplicando a fórmula provada na alínea anterior, tem-se que

$$\frac{0,54 - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{0,2} = 1 - 0,75 \Leftrightarrow 0,54 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,25 \times 0,2$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,49$$

A probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira é 0,49.

2.

2.1. $9 \times 10 \times 10 \times 2 = 1800$

2.2. $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

3.

3.1. Tem-se:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2 \times 3}{6 \times 4}$	$\frac{4 \times 3 + 2 \times 1}{6 \times 4}$	$\frac{4 \times 1}{6 \times 4}$

Donde vem:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

3.2. É pedida a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, sabendo que as quatro bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor. Ora, se as quatro bolas retiradas da caixa 1 e colocadas na caixa 2 são da mesma cor, têm que ser necessariamente todas verdes. Tal deve-se ao facto de existirem apenas duas bolas pretas na caixa 1.

Após a transferência das quatro bolas da caixa 1 para a caixa 2, esta fica com três bolas pretas e cinco bolas verdes, num total de oito bolas.

Ao retirarmos duas bolas desta caixa, existem, assim, 8C_2 casos possíveis, dos quais 3×5 são favoráveis ao acontecimento «sair uma bola de cada cor».

A probabilidade pedida é, assim, de acordo com a Regra de Laplace, $\frac{3 \times 5}{{}^8C_2}$, ou

seja, $\frac{15}{28}$

3.3. Equacionando o problema, vem: $\frac{n}{{}^{4+n}C_2} = \frac{3}{26}$

Donde, $\frac{n}{\frac{(4+n)(3+n)}{2}} = \frac{3}{26}$ pelo que

$$\frac{2n}{12 + 7n + n^2} = \frac{3}{26} \quad \text{ou seja} \quad 52n = 36 + 21n + 3n^2$$

$$\text{Donde vem} \quad 3n^2 - 31n + 36 = 0$$

$$\text{Portanto, tem-se} \quad n = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 4 \times 3 \times 36}}{2 \times 3} = \frac{31 \pm 23}{6}$$

$$\text{Tem-se, assim, } n = 9 \quad \vee \quad n = \frac{4}{3}$$

Como, nas condições do problema, n tem que ser um número natural, vem, por fim, que $n = 9$ é a solução procurada.