TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

7 de Dezembro de 2005

RESOLUÇÃO - VERSÃO 3

Grupo I

1. ${}^{20}C_{10} = 184\,756$ — Resposta **B**

2. $3! \times 2^3 = 6 \times 8 = 48$ — Resposta **A**

3. $1 \times 3! \times {}^{9}A_2 = 1 \times 6 \times 72 = 432$ — Resposta **C**

4. $0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$ — Resposta **B**

5. $\dfrac{2 \times 3}{{}^{5}C_2} = 0{,}6$ — Resposta **B**

6. $\dfrac{2 \times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{18}$ — Resposta **D**

7. Distribuição de probabilidades associada à variável aleatória
X : «Número saído no lançamento de um dado»:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Média da variável aleatória X :

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \ldots\ldots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$3{,}5$ é o número médio (esperado) de pontos, por lançamento.

$3{,}5 \times 6\,000 = 21\,000$ — Resposta **C**

Grupo II

1.

1.1. $$\frac{P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{1 - P(B) - P(\overline{A \cup B})}{P(A)} =$$

$$= \frac{1 - P(B) - [1 - P(A \cup B)]}{P(A)} = \frac{1 - P(B) - 1 + P(A \cup B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{-P(B) + P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{-P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

1.2. Do enunciado, sabemos que, considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 5 são rapazes. Isto significa que, no universo dos portugueses, a proporção de rapazes é $\frac{3}{5}$, ou seja, designando por A o acontecimento «*ser português*» e por B o acontecimento «*ser rapaz*», tem-se que

$P(B|A) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Tem-se também que $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ e $P(\overline{B}) = 0{,}52$

Donde, aplicando a fórmula provada na alínea anterior, tem-se que

$$\frac{0{,}52 - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{0{,}25} = 1 - 0{,}6 \Leftrightarrow 0{,}52 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}25 \times 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}42$$

A probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira é $0{,}42$.

2.

2.1. $9 \times 10 \times 2 = 180$

2.2. $9 \times 9 \times 8 = 648$

3.

3.1. Tem-se:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2 \times 2}{5 \times 3}$	$\frac{3 \times 2 + 2 \times 1}{5 \times 3}$	$\frac{3 \times 1}{5 \times 3}$

Donde vem:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$

3.2. É pedida a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, sabendo que as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor.
Ora, se as três bolas retiradas da caixa 1 e colocadas na caixa 2 são da mesma cor, têm que ser necessariamente todas verdes. Tal deve-se ao facto de existirem apenas duas bolas pretas na caixa 1.
Após a transferência das três bolas da caixa 1 para a caixa 2, esta fica com duas bolas pretas e quatro bolas verdes, num total de seis bolas.
Ao retirarmos duas bolas desta caixa, existem, assim, ${}^6C_2$ casos possíveis, dos quais 2×4 são favoráveis ao acontecimento «*sair uma bola de cada cor*».
A probabilidade pedida é, assim, de acordo com a Regra de Laplace, $\frac{2 \times 4}{{}^6C_2}$, ou seja, $\frac{8}{15}$

3.3. Equacionando o problema, vem: $\frac{n}{{}^{3+n}C_2} = \frac{5}{39}$

Donde, $\frac{n}{\frac{(3+n)(2+n)}{2}} = \frac{5}{39}$ pelo que

$\frac{2n}{6+5n+n^2} = \frac{5}{39}$ ou seja $78n = 30 + 25n + 5n^2$

Donde vem $5n^2 - 53n + 30 = 0$

Portanto, tem-se $n = \frac{53 \pm \sqrt{53^2 - 4 \times 5 \times 30}}{2 \times 5} = \frac{53 \pm 47}{10}$

Tem-se, assim, $n = 10 \vee n = 0{,}6$.

Como, nas condições do problema, n tem que ser um número natural, vem, por fim, que $n = 10$ é a solução procurada.