

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos**

7/Dezembro/2005

PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA

VERSÃO 4

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

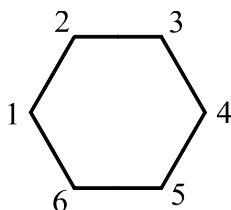
Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

- 1.** Quatro raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia.
De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?
- (A) 512 (B) 384 (C) 128 (D) 48
- 2.** Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (*Espadas, Copas, Ouros e Paus*). Em cada naipe há um Ás, três figuras (*Rei, Dama e Valete*) e mais nove cartas (do *Dois* ao *Dez*).
A Joana pretende fazer uma sequência com **oito** cartas do naipe de *Copas*. Ela quer iniciar a sequência com o Ás, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com quatro das nove restantes cartas desse naipe.
Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?
- (A) 18 144 (B) 17 343 (C) 16 232 (D) 15 080
- 3.** De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros termos é 17.
Qual é o maior termo dessa linha?
- (A) 15 070 (B) 14 224 (C) 13 102 (D) 12 870

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 1$.
No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são -4 , -2 , 0 , 2 e 4 .
Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos.
Qual é a probabilidade de esse segmento intersectar o eixo das abcissas?
- (A) 0,6 (B) 0,5 (C) 0,4 (D) 0,3

5. Na figura está representado um hexágono regular com os vértices numerados de 1 a 6.



Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
Em cada lançamento, selecciona-se o vértice do hexágono que corresponde ao número saído nesse lançamento.

Note que, no final da experiência, podemos ter um ou dois pontos seleccionados (por exemplo: se sair o mesmo número nos dois lançamentos, só é seleccionado um ponto).

Qual é a probabilidade de se seleccionarem dois pontos que sejam os extremos de um diâmetro da circunferência circunscrita ao hexágono?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{10}$
6. O João vai lançar doze mil vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e vai adicionar os números saídos.
De qual dos seguintes valores é de esperar que a soma obtida pelo João esteja mais próxima?
- (A) 36 000 (B) 38 000 (C) 40 000 (D) 42 000

7. Admita que a variável *altura*, em centímetros, das raparigas de 14 anos, de uma certa escola, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 160.
Sabe-se ainda que, nessa escola, 15% das raparigas de 14 anos têm menos de 150 cm de altura.
Escolhida, ao acaso, uma rapariga de 14 anos dessa escola, qual é a probabilidade de a sua altura estar compreendida entre 160 cm e 170 cm?
- (A) 0,35 (B) 0,3 (C) 0,25 (D) 0,2

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja C o conjunto de todos os números naturais com quatro algarismos (ou seja, de todos os números naturais de 1000 a 9999).

1.1. Quantos elementos do conjunto C são múltiplos de 5?

1.2. Quantos elementos do conjunto C têm os algarismos todos diferentes?

2.

2.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(B) > 0$.

Sejam $\bar{A}$ e $\bar{B}$ os acontecimentos contrários de A e de B , respectivamente.

Seja $P(A|B)$ a probabilidade de A , se B .

Mostre que:
$$\frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

2.2. Próximo de uma praia portuguesa, realiza-se um acampamento internacional de juventude, no qual participam jovens de ambos os sexos.

Sabe-se que:

- a quinta parte dos jovens são portugueses, sendo os restantes estrangeiros;
- 54% dos jovens participantes no acampamento são do sexo feminino;
- considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 4 são rapazes.

No último dia, a organização vai sortear um prémio, entre todos os jovens participantes no acampamento.

Qual é a probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: se o desejar, pode utilizar a igualdade da alínea anterior (nesse caso, comece por identificar claramente, no contexto do problema, os acontecimentos A e B); no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo (como, por exemplo, através de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama em árvore).

- 3.** Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e quatro bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém três bolas pretas e uma bola verde.

- 3.1.** Considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa. Seja X a variável aleatória «*número de bolas verdes que existem no conjunto das duas bolas retiradas*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X , apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

- 3.2.** Considere agora que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência:
- ao acaso, retiram-se simultaneamente quatro bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2;
 - em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam os acontecimentos:

A : «as quatro bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»;

B : «as duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes».

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(B|A)$, apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de $P(B|A)$, no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

- 3.3.** Considere agora que, na caixa número 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais n bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com três bolas pretas, uma bola verde e n bolas amarelas.

Considere a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa.

Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e a outra ser verde é $\frac{3}{26}$, determine o valor de n .

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II137

1. 36
 1.1. 18
 1.2. 18

2. 38
 2.1. 20
 2.2. 18

3. 63
 3.1. 20
 3.2. 20
 3.3. 23

TOTAL 200