TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

7 de Dezembro de 2005

RESOLUÇÃO - VERSÃO 4

Grupo I

1. $4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$ Resposta **B**

2. $1 \times 3! \times {}^9A_4 = 1 \times 6 \times 3024 = 18\,144$ Resposta **A**

3. ${}^{16}C_8 = 12\,870$ Resposta **D**

4. $\dfrac{4 \times 1}{{}^5C_2} = 0{,}4$ Resposta **C**

5. $\dfrac{3 \times 2!}{6^2} = \dfrac{1}{6}$ Resposta **B**

6. Distribuição de probabilidades associada à variável aleatória X : «Número saído no lançamento de um dado»:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Média da variável aleatória X :

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \ldots\ldots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$3{,}5$ é o número médio (esperado) de pontos, por lançamento.

$3{,}5 \times 12\,000 = 42\,000$ Resposta **D**

7. $0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$ Resposta **A**

Grupo II

1.

1.1. $9 \times 10 \times 10 \times 2 = 1\,800$

1.2. $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$

2.

2.1. $\dfrac{P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(B)} = \dfrac{1 - P(A) - P(\overline{A \cup B})}{P(B)} =$

$= \dfrac{1 - P(A) - [1 - P(A \cup B)]}{P(B)} = \dfrac{1 - P(A) - 1 + P(A \cup B)}{P(B)} =$

$= \dfrac{-P(A) + P(A \cup B)}{P(B)} = \dfrac{-P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$

2.2. Do enunciado, sabemos que, considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 4 são rapazes. Isto significa que, no universo dos portugueses, a proporção de rapazes é $\dfrac{3}{4}$, ou seja, designando por B o acontecimento «*ser português*» e por A o acontecimento «*ser rapaz*», tem-se que

$P(A|B) = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Tem-se também que $P(B) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ e $P(\overline{A}) = 0{,}54$

Donde, aplicando a fórmula provada na alínea anterior, tem-se que

$\dfrac{0{,}54 - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{0{,}2} = 1 - 0{,}75 \Leftrightarrow 0{,}54 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}25 \times 0{,}2$

$\Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}49$

A probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira é $0{,}49$.

3.

3.1. Tem-se:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2\times 3}{6\times 4}$	$\frac{4\times 3+2\times 1}{6\times 4}$	$\frac{4\times 1}{6\times 4}$

Donde vem:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

3.2. É pedida a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, sabendo que as quatro bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor.
Ora, se as quatro bolas retiradas da caixa 1 e colocadas na caixa 2 são da mesma cor, têm que ser necessariamente todas verdes. Tal deve-se ao facto de existirem apenas duas bolas pretas na caixa 1.
Após a transferência das quatro bolas da caixa 1 para a caixa 2, esta fica com três bolas pretas e cinco bolas verdes, num total de oito bolas.
Ao retirarmos duas bolas desta caixa, existem, assim, ${}^{8}C_2$ casos possíveis, dos quais 3×5 são favoráveis ao acontecimento «*sair uma bola de cada cor*».
A probabilidade pedida é, assim, de acordo com a Regra de Laplace, $\frac{3\times 5}{{}^{8}C_2}$, ou seja, $\frac{15}{28}$

3.3. Equacionando o problema, vem: $\frac{n}{{}^{4+n}C_2} = \frac{3}{26}$

Donde, $\frac{n}{\frac{(4+n)(3+n)}{2}} = \frac{3}{26}$ pelo que

$\frac{2n}{12+7n+n^2} = \frac{3}{26}$ ou seja $52n = 36 + 21n + 3n^2$

Donde vem $3n^2 - 31n + 36 = 0$

Portanto, tem-se $n = \frac{31\pm\sqrt{31^2-4\times 3\times 36}}{2\times 3} = \frac{31\pm 23}{6}$

Tem-se, assim, $n=9 \ \vee \ n=\frac{4}{3}$

Como, nas condições do problema, n tem que ser um número natural, vem, por fim, que $n=9$ é a solução procurada.