TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

17 de Março de 2006

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. $\lim y_n = \lim\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 1+\lim\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

Tendo em conta a continuidade da função logarítmica, tem-se que

$\lim\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \ln\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

Prosseguindo, tem-se: $1+\ln\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 1+\ln e = 1+1 = 2$

Resposta **A**

2. Tem-se sucessivamente:

$$e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{x-2} = e^{-1/2} \Leftrightarrow x-2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Resposta **B**

3. Tem-se sucessivamente:

$$\log_3(1-x) \leq 1 \Leftrightarrow 1-x \leq 3 \wedge 1-x > 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 1[$$

Resposta **A**

4. A partir dos dados do enunciado, podemos concluir que

- a ordenada de A é 1, logo a ordenada de C é 2 e, portanto, a abcissa de E é e^2
- a abcissa de B é 1, logo a abcissa de D é também 1 e, portanto, a ordenada de D é e

Assim, no triângulo $[CDE]$, a base $[CE]$ mede e^2 e a altura correspondente mede $e-2$

Portanto, a área do triângulo $[CDE]$ é $\frac{e^2(e-2)}{2}$

Resposta **D**

5. Designando por A o acontecimento «*o aluno pratica andebol*» e por B o acontecimento «*o aluno pratica basquetebol*», tem-se:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Por outro lado, tem-se sempre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como todos os alunos da turma praticam pelo menos um dos dois desportos, tem-se $P(A \cup B) = 1$

Donde, $1 = 0{,}5 + 0{,}7 - P(A \cap B)$

Portanto, $P(A \cap B) = 0{,}2$

Tem-se, então,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$$

Resposta **D**

6. Em cada lançamento, a probabilidade de sair 1 é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Em cada lançamento, a probabilidade de sair 2 é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Dado que os acontecimentos em causa são independentes, vem:

x_i	$2\ (1+1)$	$3\ (1+2$ ou $2+1)$	$4\ (2+2)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

ou seja,

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

Portanto, $k = 2$

Resposta **B**

7. Tem-se que:

Número de casos possíveis: ${}^{6}C_3$

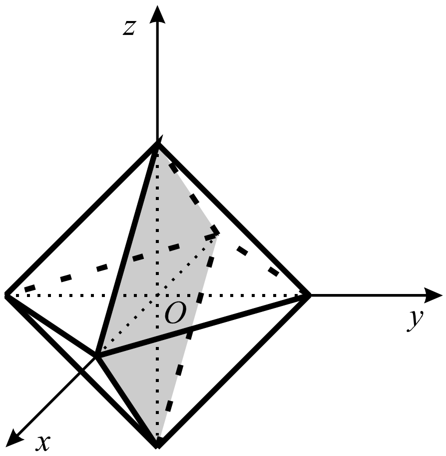
(número de maneiras de escolher três dos seis vértices do octaedro).

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_3$

(número de maneiras de escolher três dos quatro vértices do octaedro que pertencem ao plano xOz).

Probabilidade pedida:

$$\frac{{}^{4}C_3}{{}^{6}C_3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$



Resposta **C**

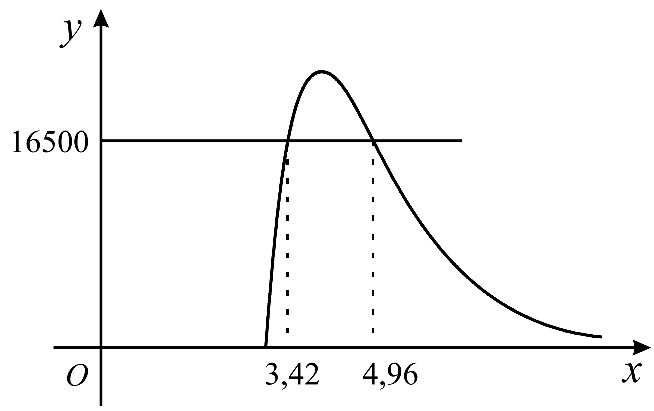
Grupo II

1.1. O lucro que a empresa tem em cada litro de azeite que vende é $x-3$ (diferença entre o preço de venda ao público e a despesa que acarreta um litro de azeite).

Assim, o lucro mensal L (em euros), resultante da venda do azeite, é igual ao produto do lucro que aufere em cada litro de azeite pelo número de litros de azeite vendidos num mês.

Assim, $L(x) = (x-3)\,V(x)$, e portanto, $L(x) = (x-3)\,e^{\,14-x}$

1.2. Com o objectivo de resolver graficamente a inequação $L(x) > 16500$, obteve-se na calculadora o gráfico da função L e a recta de equação $y = 16500$



Da observação do gráfico, podemos concluir que o preço do litro de azeite deve variar entre 3,42 € e 4,96 €

2.1. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1+\ln 2}{\frac{1}{2}} = 2 + 2\ln 2 = \ln\,(e^2) + \ln 4 = \ln(4\,e^2)$

2.2.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x} = \frac{1-(-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a recta de equação $x=0$ é assimptota (vertical) do gráfico de f

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, não existem mais assimptotas verticais.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 - 0 = 0$$

Portanto, a recta de equação $y=0$ é assimptota (horizontal) do gráfico de f

3. A função a não é adequada à situação descrita, pois:

- é decrescente no intervalo $[0\,,5]$, o que contradiz o facto de a temperatura da água ter aumentado ao longo dos primeiros cinco minutos;
- é crescente no intervalo $[5\,,+\infty[$, o que contradiz o facto de a temperatura da água ter diminuído a partir do instante em que se apagou o lume.

(Observação: como é evidente, bastaria apresentar um dos dois argumentos anteriores)

Na função b tem-se $b(5)=84$ e $\lim\limits_{t\to 5^+} b(t) = 94$, o que traduz um acréscimo instantâneo de temperatura, no momento em que o lume é apagado. Esta situação não faz qualquer sentido no contexto da experiência, o que nos permite afirmar que a função b também não é adequada à situação descrita.

Relativamente à função c tem-se $c(0)=14$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = 24$, o que não está de acordo com a conclusão, que se tira do enunciado, de que são iguais a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, e o valor para o qual a temperatura tende, com o passar do tempo. Concluímos, portanto, que a função c também não é adequada à situação descrita.

A função correcta é, portanto, a d.

4. Dado que a recta de equação $y = x + 2$ é assimptota do gráfico de g, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (g(x) - x\ ) = 2$$

Tem-se, sucessivamente,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\,g(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\ (x - g(x))}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left((\ x - g(x)) \times \frac{x}{g(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\ (\ g(x) - x) \times \frac{x}{g(x)} \right) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} (\ g(x) - x) \ \times \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{g(x)} = -\ 2 \times 1 = -\ 2$$

Portanto, a recta de equação $y = x - 2$ é assimptota do gráfico de h.