

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

17 de Março de 2006

RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

Grupo I

1. Tem-se sucessivamente:

$$e^{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \Leftrightarrow e^{x-1} = e^{-1/3} \Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Resposta A

2. Tem-se sucessivamente:

$$\log_3(2-x) \leq 1 \Leftrightarrow 2-x \leq 3 \wedge 2-x > 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2[$$

Resposta D

3. $\lim y_n = \lim \left[2 + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 2 + \lim \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$

Tendo em conta a continuidade da função logarítmica, tem-se que

$$\lim \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = \ln \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$$

Prosseguindo, tem-se: $2 + \ln \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 2 + \ln e = 2 + 1 = 3$

Resposta D

4. A partir dos dados do enunciado, podemos concluir que

- a ordenada de A é 1, logo a ordenada de C é 2 e, portanto, a abcissa de E é e^2
- a abcissa de B é 1, logo a abcissa de D é também 1 e, portanto, a ordenada de D é e

Assim, no triângulo $[BDE]$, a base $[BD]$ mede e e a altura correspondente mede $e^2 - 1$

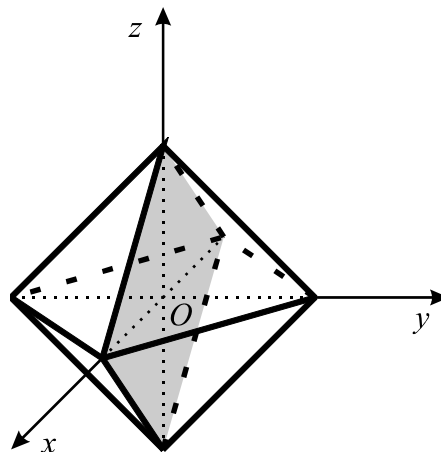
Portanto, a área do triângulo $[BDE]$ é $\frac{e(e^2-1)}{2}$

Resposta A

5. Tem-se que:
 Número de casos possíveis: 6C_2
 (número de maneiras de escolher dois dos seis vértices do octaedro).
 Número de casos favoráveis: 4C_2
 (número de maneiras de escolher dois dos quatro vértices do octaedro que pertencem ao plano xOz).

Probabilidade pedida:

$$\frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$



Resposta **B**

6. Designando por A o acontecimento «o aluno pratica andebol» e por B o acontecimento «o aluno pratica basquetebol», tem-se:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Por outro lado, tem-se sempre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como todos os alunos da turma praticam pelo menos um dos dois desportos, tem-se $P(A \cup B) = 1$

Donde, $1 = 0,5 + 0,8 - P(A \cap B)$

Portanto, $P(A \cap B) = 0,3$

Tem-se, então,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

Resposta **D**

7. Em cada lançamento, a probabilidade de sair 1 é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Em cada lançamento, a probabilidade de sair 2 é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Dado que os acontecimentos em causa são independentes, vem:

x_i	$2 (1 + 1)$	$3 (2 + 1 \text{ ou } 1 + 2)$	$4 (2 + 2)$
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

ou seja,

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Portanto, $k = 4$

Resposta **D**

Grupo II

1.1.
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2 - \ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{2 + \ln 3}{\frac{1}{3}} = 6 + 3 \ln 3 = \ln(e^6) + \ln 3^3 = \ln(27e^6)$$

1.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \ln x}{x} = \frac{2 - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a recta de equação $x = 0$ é assíntota (vertical) do gráfico de f .

Como a função f é contínua em \mathbb{R}^+ , não existem mais assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

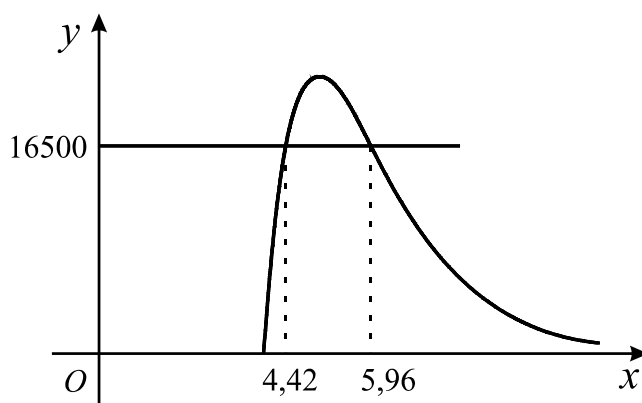
Portanto, a recta de equação $y = 0$ é assíntota (horizontal) do gráfico de f

- 2.1.** O lucro que a empresa tem em cada litro de azeite que vende é $x - 4$ (diferença entre o preço de venda ao público e a despesa que acarreta um litro de azeite).

Assim, o lucro mensal L (em euros), resultante da venda do azeite, é igual ao produto do lucro que auferem em cada litro de azeite pelo número de litros de azeite vendidos num mês.

$$\text{Assim, } L(x) = (x - 4)V(x), \text{ e portanto, } L(x) = (x - 4)e^{15-x}$$

- 2.2.** Com o objectivo de resolver graficamente a inequação $L(x) > 16500$, obteve-se, na calculadora, o gráfico da função L e a recta de equação $y = 16500$



Da observação do gráfico, podemos concluir que o preço do litro de azeite deve variar entre 4,42 € e 5,96 €

- 3.** Relativamente à função a tem-se $a(0) = 26$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 21$, o que não está de acordo com a conclusão, que se tira do enunciado, de que são iguais a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, e o valor para o qual a temperatura tende, com o passar do tempo. Concluímos, portanto, que a função a não é adequada à situação descrita.

Na função b tem-se $b(5) = 64$ e $\lim_{t \rightarrow 5^+} b(t) = 74$, o que traduz um acréscimo instantâneo de temperatura, no momento em que o lume é apagado. Esta situação não faz qualquer sentido no contexto da experiência, o que nos permite afirmar que a função b também não é adequada à situação descrita.

A função c também não é adequada à situação descrita, pois:

- é decrescente no intervalo $[0, 5]$, o que contradiz o facto de a temperatura da água ter aumentado ao longo dos primeiros cinco minutos;
- é crescente no intervalo $[5, +\infty[$, o que contradiz o facto de a temperatura da água ter diminuído a partir do instante em que se apagou o lume.

(Observação: como é evidente, bastaria apresentar um dos dois argumentos anteriores)

A função correcta é, portanto, a d .

4. Dado que a recta de equação $y = x + 3$ é asymptota do gráfico de g , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = 3$$

Tem-se, sucessivamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = 1$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x - g(x))}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x - g(x)) \times \frac{x}{g(x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- (g(x) - x) \times \frac{x}{g(x)} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = -3 \times 1 = -3 \end{aligned}$$

Portanto, a recta de equação $y = x - 3$ é asymptota do gráfico de h .