TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

17 de Março de 2006

RESOLUÇÃO - VERSÃO 3

Grupo I

1. $\lim y_n = \lim\left[2+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 2+\lim\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

Tendo em conta a continuidade da função logarítmica, tem-se que

$\lim\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \ln\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

Prosseguindo, tem-se: $2+\ \ln\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 2+\ln e = 2+1 = 3$

Resposta **B**

2. Tem-se sucessivamente:

$$e^{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \Leftrightarrow e^{x-1} = e^{-1/3} \Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Resposta **A**

3. Tem-se sucessivamente:

$$\log_3(2-x) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2-x \le 3 \ \wedge \ 2-x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1, 2[$$

Resposta **B**

4. A partir dos dados do enunciado, podemos concluir que

- a ordenada de A é 1, logo a ordenada de C é 2 e, portanto, a abcissa de E é e^2
- a abcissa de B é 1, logo a abcissa de D é também 1 e, portanto, a ordenada de D é e

Assim, no triângulo $[BDE]$, a base $[BD]$ mede e e a altura correspondente mede e^2-1

Portanto, a área do triângulo $[BDE]$ é $\frac{e\left(e^2-1\right)}{2}$

Resposta **C**

5. Designando por A o acontecimento «*o aluno pratica andebol*» e por B o acontecimento «*o aluno pratica basquetebol*», tem-se:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Por outro lado, tem-se sempre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como todos os alunos da turma praticam pelo menos um dos dois desportos, tem-se $P(A \cup B) = 1$

Donde, $1 = 0{,}5 + 0{,}8 - P(A \cap B)$

Portanto, $P(A \cap B) = 0{,}3$

Tem-se, então,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

Resposta **A**

6. Em cada lançamento, a probabilidade de sair 1 é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Em cada lançamento, a probabilidade de sair 2 é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Dado que os acontecimentos em causa são independentes, vem:

x_i	$2\ (1+1)$	$3\ (2+1$ ou $1+2)$	$4\ (2+2)$
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

ou seja,

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Portanto, $k = 4$

Resposta **D**

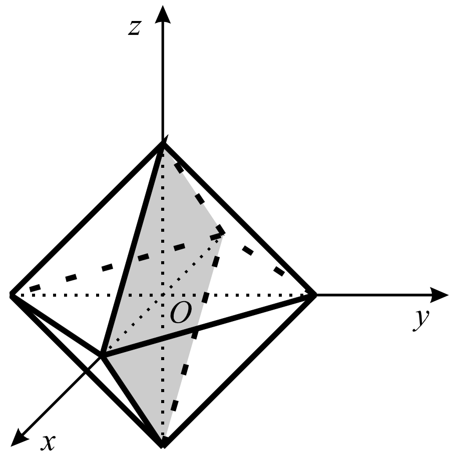
7. Tem-se que:

Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2$
(número de maneiras de escolher dois dos seis vértices do octaedro).

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2$
(número de maneiras de escolher dois dos quatro vértices do octaedro que pertencem ao plano xOz).

Probabilidade pedida:

$$\frac{{}^{4}C_2}{{}^{6}C_2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$



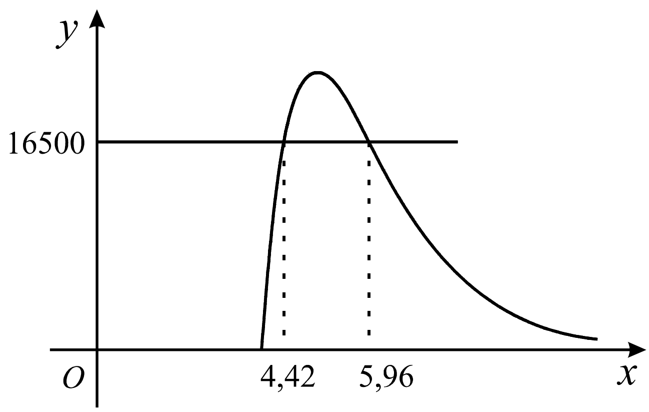
Resposta **D**

Grupo II

1.1. O lucro que a empresa tem em cada litro de azeite que vende é $x - 4$ (diferença entre o preço de venda ao público e a despesa que acarreta um litro de azeite).
Assim, o lucro mensal L (em euros), resultante da venda do azeite, é igual ao produto do lucro que aufere em cada litro de azeite pelo número de litros de azeite vendidos num mês.

Assim, $L(x) = (x-4)\,V(x)$, e portanto, $L(x) = (x-4)\,e^{\,15-x}$

1.2. Com o objectivo de resolver graficamente a inequação $L(x) > 16500$, obteve-se, na calculadora, o gráfico da função L e a recta de equação $y = 16500$



Da observação do gráfico, podemos concluir que o preço do litro de azeite deve variar entre 4,42 € e 5,96 €

2.1. $f\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{2-\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = \dfrac{2+\ln 3}{\frac{1}{3}} = 6 + 3\ \ln 3 = \ln\ (e^6) + \ \ln 3^3 = \ln(27e^6)$

2.2.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-\ln x}{x} = \frac{2-(-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a recta de equação $x=0$ é assimptota (vertical) do gráfico de f.

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, não existem mais assimptotas verticais.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0-0=0$$

Portanto, a recta de equação $y=0$ é assimptota (horizontal) do gráfico de f

3. Relativamente à função a tem-se $a(0)=26$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t) = 21,$ o que não está de acordo com a conclusão, que se tira do enunciado, de que são iguais a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, e o valor para o qual a temperatura tende, com o passar do tempo. Concluímos, portanto, que a função a não é adequada à situação descrita.

Na função b tem-se $b(5)=64$ e $\lim\limits_{t\to 5^+} b(t) = 74,$ o que traduz um acréscimo instantâneo de temperatura, no momento em que o lume é apagado. Esta situação não faz qualquer sentido no contexto da experiência, o que nos permite afirmar que a função b também não é adequada à situação descrita.

A função c também não é adequada à situação descrita, pois:

- é decrescente no intervalo $[0\,,5]$, o que contradiz o facto de a temperatura da água ter aumentado ao longo dos primeiros cinco minutos;
- é crescente no intervalo $[5\,,\,+\infty[$, o que contradiz o facto de a temperatura da água ter diminuído a partir do instante em que se apagou o lume.

(Observação: como é evidente, bastaria apresentar um dos dois argumentos anteriores)

A função correcta é, portanto, a d.

4. Dado que a recta de equação $y = x + 3$ é assimptota do gráfico de g, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} (g(x) - x\ ) = 3$$

Tem-se, sucessivamente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} (h(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\,g(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ (x - g(x))}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left((\ x - g(x)) \times \frac{x}{g(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\ (\ g(x) - x) \times \frac{x}{g(x)} \right) =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} (\ g(x) - x) \times \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{g(x)} = -\,3 \times 1 = -\,3$$

Portanto, a recta de equação $y = x - 3$ é assimptota do gráfico de h.