

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

10 de Maio de 2007

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

---

### Grupo I

1. As assíntotas do gráfico da função definida por  $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$  são as rectas de equações  $y = a$  e  $x = b$ .

Tem-se, assim, que  $a > 0 \wedge b < 0$

Resposta **B**

2. Na fracção  $\frac{x^2+1}{2-x}$  o numerador é positivo, para qualquer  $x$  real, pelo que a fracção é negativa quando o denominador o for.

Ora,  $2-x < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$

Resposta **D**

3.  $f^{-1}(2) + (g \circ h)(\sqrt{2}) = 3 + g[h(\sqrt{2})] =$   
 $= 3 + g(1) = 3 + 3 = 6$

Resposta **C**

4. Tem-se que  $f'(x) = -2x$ , pelo que  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

O declive da recta  $t$  é, portanto,  $-1$ , pelo que a sua inclinação é  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Resposta **C**

5.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}) =$   
 $= 12 \times 15 \times \frac{4}{5} = 144$

Resposta **D**

6.  $5 + 2 \cos x = 6 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

No intervalo  $[0, 2\pi]$ , as soluções desta equação são

$\frac{\pi}{3}$  e  $2\pi - \frac{\pi}{3}$ , ou seja,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$

Resposta **B**

7. O valor máximo da função objectivo de um problema de Programação Linear é atingido num vértice da região admissível.

Os vértices da região representada são:

$$(0, 0)$$

$$(0, 6) \rightarrow \text{intersecção do eixo } Oy \text{ com a recta de equação } y = 6$$

$$(3, 6) \rightarrow \text{intersecção das rectas de equações } y = 6 \text{ e } 2x + y = 12$$

$$(5, 2) \rightarrow \text{intersecção das rectas de equações } x = 5 \text{ e } 2x + y = 12$$

$$(5, 0) \rightarrow \text{intersecção do eixo } Ox \text{ com a recta de equação } x = 5$$

Calculemos o valor da função objectivo,  $z = x + y$ , em cada um destes pontos:

$$(0, 0) \rightarrow z = 0 + 0 = 0$$

$$(0, 6) \rightarrow z = 0 + 6 = 6$$

$$(3, 6) \rightarrow z = 3 + 6 = 9$$

$$(5, 2) \rightarrow z = 5 + 2 = 7$$

$$(5, 0) \rightarrow z = 5 + 0 = 5$$

Assim, o valor máximo que a função objectivo pode alcançar na região representada é 9.

Resposta **B**

## Grupo II

### 1.

1.1. Tem-se:  $v'(t) = 3t^2 - 30t + 63$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 30t + 63 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 21}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{10 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \vee t = 7$$

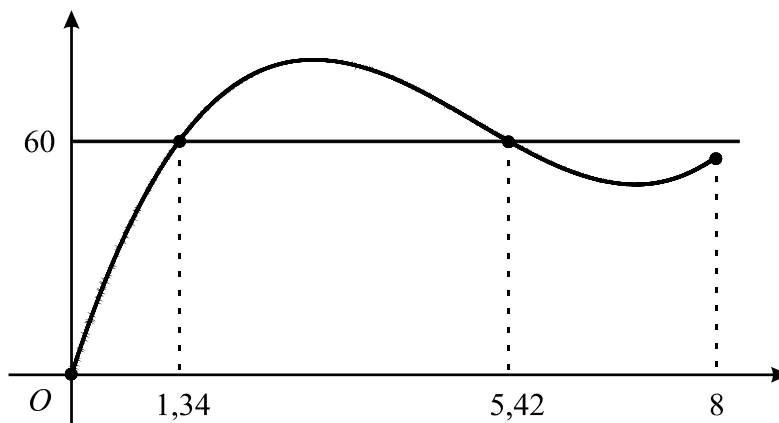
$t$	0		3		7		8
$v'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
$v(t)$	0	↗	81	↘	49	↗	56

Portanto, a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência, foi de 81 centenas de rotações por minuto.

**1.2.** Comecemos por observar que 6 000 (rotações por minuto) é igual a 60 centenas (de rotações por minuto).

Temos, assim, de começar por resolver a inequação  $v(t) > 60$ .

Na figura está representado o gráfico da função  $v$ , bem como a recta de equação  $y = 60$ .



Assinalaram-se os pontos de intersecção do gráfico de  $v$  com a recta, bem como as respectivas abcissas, com duas casas decimais, conforme era pedido no enunciado.

Portanto, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6 000 rotações por minuto durante  $5,42 - 1,34$  minutos, ou seja, durante 4,08 minutos.

Atendendo a que  $0,08 \times 60 \approx 5$ , podemos concluir que a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6 000 rotações por minuto durante 4 minutos e 5 segundos.

## 2.

**2.1.** Comecemos por determinar uma equação do plano  $\alpha$ .

Um vector normal ao plano  $\alpha$  é o vector de coordenadas  $(1, 0, 2)$ .

Portanto, o plano  $\alpha$  pode ser definido por uma equação do tipo  $x + 2z = d$

Como o plano  $\alpha$  contém o ponto  $P(0, 4, 3)$ , vem  $0 + 2 \times 3 = d$ , ou seja,  $d = 6$ .

Uma equação do plano  $\alpha$  é, portanto,  $x + 2z = 6$ .

O centro da esfera é o ponto de coordenadas  $(-2, 1, 4)$ . Substituindo estas coordenadas na equação  $x + 2z = 6$  vem  $-2 + 2 \times 4 = 6$ , o que é verdade, pelo que o plano  $\alpha$  contém o centro da esfera.

Assim, a secção produzida pelo plano  $\alpha$  na esfera é um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera e cujo raio é igual ao da esfera.

Como a área de um círculo é dada por  $\pi r^2$ , a área da secção é igual a  $3\pi$ .

**2.2.1.** O perímetro do triângulo  $[OPQ]$  é igual a  $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{PQ}$

Tem-se que:

$$\overline{OP}^2 = 3^2 + 4^2, \text{ pelo que } \overline{OP} = 5$$

$$\overline{OQ} = z$$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \|\vec{PQ}\| = \|Q - P\| = \\ &= \|(0, 0, z) - (0, 4, 3)\| = \\ &= \|(0, -4, z - 3)\| = \sqrt{0 + 16 + (z - 3)^2} = \\ &= \sqrt{16 + z^2 - 6z + 9} = \sqrt{z^2 - 6z + 25}\end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  é igual a  $z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

**2.2.2.** Tem-se:

$$\begin{aligned}z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25} &= 16 \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 6z + 25} = 16 - z - 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 6z + 25} &= 11 - z \Rightarrow \left(\sqrt{z^2 - 6z + 25}\right)^2 = (11 - z)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^2 - 6z + 25 &= 121 - 22z + z^2 \Leftrightarrow 22z - 6z = 121 - 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16z &= 96 \Leftrightarrow z = 6\end{aligned}$$

Como, num passo da resolução, se elevaram ambos os membros da equação ao quadrado, não é possível garantir que 6 é solução da equação inicial. Temos de verificar se assim é:

$$6 + 5 + \sqrt{6^2 - 6 \times 6 + 25} = 16 \Leftrightarrow 16 = 16, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, 6 é solução da equação inicial.

Assim, o ponto  $Q$  deve ter cota 6, de modo que o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  seja igual a 16.

### 3.

3.1. Resulta da figura que  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$

Pretende-se saber  $5 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos (3\pi - \alpha)$

Ora,  $5 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos (3\pi - \alpha) = 5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = 3 \cos \alpha$

Portanto, sabemos que  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$  e queremos saber o valor de  $3 \cos \alpha$

Tem-se:  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Vem, então:  $1 + (\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo cujo lado extremidade está no terceiro quadrante, tem-se que  $\cos \alpha < 0$ .

Portanto,  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Vem então que  $3 \cos \alpha = -1$

3.2. Apresentamos a seguir três possíveis processos de resolução:

1º Processo:

Seja  $\beta$  a amplitude do ângulo  $QOP$ .

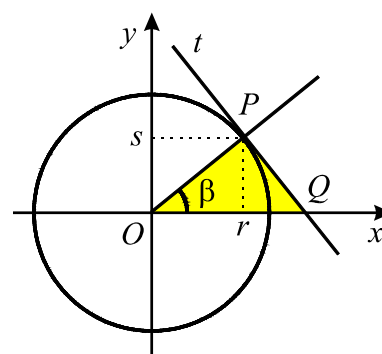
Por um lado, tem-se que  $\cos \beta = r$

Por outro lado, tem-se que

$$\cos \beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\overline{OQ}}$$

Portanto,  $\frac{1}{\overline{OQ}} = r$ , donde  $\overline{OQ} = \frac{1}{r}$

Portanto, a recta  $t$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa  $\frac{1}{r}$



### 2º Processo:

Seja  $x$  a abcissa do ponto  $Q$ . Como este ponto pertence ao eixo  $Ox$ , a sua ordenada é zero.

Tem-se assim que  $Q$  tem coordenadas  $(x, 0)$ .

Como a recta  $t$  é tangente à circunferência no ponto  $P$ , os vectores  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{PQ}$  são perpendiculares, pelo que  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ .

Como  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, 0) - (r, s) = (x - r, -s)$ , vem:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (r, s) \cdot (x - r, -s) = 0 \Leftrightarrow rx - r^2 - s^2 = 0 \Leftrightarrow rx = r^2 + s^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{r}$$

### 3º Processo:

Tem-se que  $\overrightarrow{OP} = (r, s)$ , pelo que um vector director da recta  $t$  é o vector  $\vec{u} = (-s, r)$

O declive da recta  $t$  é, portanto, igual a  $-\frac{r}{s}$

A equação reduzida da recta  $t$  é, assim, da forma  $y = -\frac{r}{s}x + b$

Como o ponto  $P(r, s)$  pertence a esta recta, tem-se que  $s = -\frac{r}{s}r + b$ ,

$$\text{donde vem } b = s + \frac{r}{s}r = s + \frac{r^2}{s} = \frac{s^2 + r^2}{s} = \frac{1}{s}$$

A equação reduzida da recta  $t$  é  $y = -\frac{r}{s}x + \frac{1}{s}$

A abcissa do ponto de intersecção da recta  $t$  com o eixo  $Ox$  é a solução da equação

$$0 = -\frac{r}{s}x + \frac{1}{s} \quad (\text{onde } x \text{ é a incógnita}).$$

$$\text{Ora, } 0 = -\frac{r}{s}x + \frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{r}{s}x = \frac{1}{s} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{r}{s}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{s} \times \frac{s}{r} \Leftrightarrow x = \frac{1}{r}$$