TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

10 de Maio de 2007

RESOLUÇÃO - VERSÃO 3

Grupo I

1. $\overrightarrow{AD} \,.\, \overrightarrow{AE} = \left\| \overrightarrow{AD} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AE} \right\| \times \cos \left(\overrightarrow{AD} \,\widehat{}\, \overrightarrow{AE} \right) =$

$= 12 \times 15 \times \dfrac{4}{5} = 144$

Resposta **A**

2. $5 + 2\cos x = 6 \;\Leftrightarrow\; \cos x = \dfrac{1}{2}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, as soluções desta equação são

$\dfrac{\pi}{3}$ e $2\pi - \dfrac{\pi}{3}$, ou seja, $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{5\pi}{3}$

Resposta **D**

3. O valor máximo da função objectivo de um problema de Programação Linear é atingido num vértice da região admissível.
Os vértices da região representada são:

$(0, 0)$
$(0, 6) \rightarrow$ intersecção do eixo Oy com a recta de equação $y = 6$
$(3, 6) \rightarrow$ intersecção das rectas de equações $y = 6$ e $2x + y = 12$
$(5, 2) \rightarrow$ intersecção das rectas de equações $x = 5$ e $2x + y = 12$
$(5, 0) \rightarrow$ intersecção do eixo Ox com a recta de equação $x = 5$

Calculemos o valor da função objectivo, $z = x + y$, em cada um destes pontos:

$(0, 0) \rightarrow z = 0 + 0 = 0$
$(0, 6) \rightarrow z = 0 + 6 = 6$
$(3, 6) \rightarrow z = 3 + 6 = 9$
$(5, 2) \rightarrow z = 5 + 2 = 7$
$(5, 0) \rightarrow z = 5 + 0 = 5$

Assim, o valor máximo que a função objectivo pode alcançar na região representada é 9.

Resposta **C**

4. As assimptotas do gráfico da função definida por $f(x) = a + \dfrac{1}{x-b}$

são as rectas de equações $y = a$ e $x = b$.

Tem-se, assim, que $a > 0 \quad \wedge \quad b < 0$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{C}}$

5. Na fracção $\dfrac{x^2+1}{2-x}$ o numerador é positivo, para qualquer x real,

pelo que a fracção é negativa quando o denominador o for.

Ora, $2 - x < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

6. $f^{-1}(2) + (g \circ h)(\sqrt{2}) = 3 + g[h(\sqrt{2})] =$

$= 3 + g(1) = 3 + 3 = 6$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

7. Tem-se que $f'(x) = -2x$, pelo que $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$

O declive da recta t é, portanto, -1, pelo que a sua inclinação é

$180° - 45° = 135°$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

Grupo II

1.

1.1. Comecemos por determinar uma equação do plano α.
Um vector normal ao plano α é o vector de coordenadas $(1, 0, 2)$.
Portanto, o plano α pode ser definido por uma equação do tipo $x + 2z = d$
Como o plano α contém o ponto $P(0, 4, 3)$, vem $0 + 2 \times 3 = d$, ou seja, $d = 6$.
Uma equação do plano α é, portanto, $x + 2z = 6$.
O centro da esfera é o ponto de coordenadas $(-2, 1, 4)$. Substituindo estas coordenadas na equação $x + 2z = 6$ vem $-2 + 2 \times 4 = 6$, o que é verdade, pelo que o plano α contém o centro da esfera.
Assim, a secção produzida pelo plano α na esfera é um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera e cujo raio é igual ao da esfera.
Como a área de um círculo é dada por $\pi\, r^2$, a área da secção é igual a 3π.

1.2.1. O perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{PQ}$

Tem-se que:

$\overline{OP}^2 = 3^2 + 4^2$, pelo que $\overline{OP} = 5$

$\overline{OQ} = z$

$$\overline{PQ} = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \|Q - P\| =$$

$$= \|(0,0,z) - (0,4,3)\| =$$

$$= \|(0,\,-4, z-3)\| = \sqrt{\,0 + 16 + (z-3)^2\,} =$$

$$= \sqrt{16 + z^2 - 6\,z + 9} = \sqrt{z^2 - 6\,z + 25}$$

Portanto, o perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $z + 5 + \sqrt{z^2 - 6\,z + 25}$

1.2.2. Tem-se:

$$z + 5 + \sqrt{z^2 - 6\,z + 25} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 6\,z + 25} = 16 - z - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 6\,z + 25} = 11 - z \Rightarrow \left(\sqrt{z^2 - 6\,z + 25}\right)^2 = (11 - z)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 6\,z + 25 = 121 - 22\,z + z^2 \Leftrightarrow 22\,z - 6z = 121 - 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\,z = 96 \Leftrightarrow z = 6$$

Como, num passo da resolução, se elevaram ambos os membros da equação ao quadrado, não é possível garantir que 6 é solução da equação inicial. Temos de verificar se assim é:

$6 + 5 + \sqrt{6^2 - 6 \times 6 + 25} = 16 \Leftrightarrow 16 = 16,$ o que é verdade.

Portanto, 6 é solução da equação inicial.

Assim, o ponto Q deve ter cota 6, de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 16.

2.

2.1. Tem-se: $v'(t) = 3t^2 - 30t + 63$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 30t + 63 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

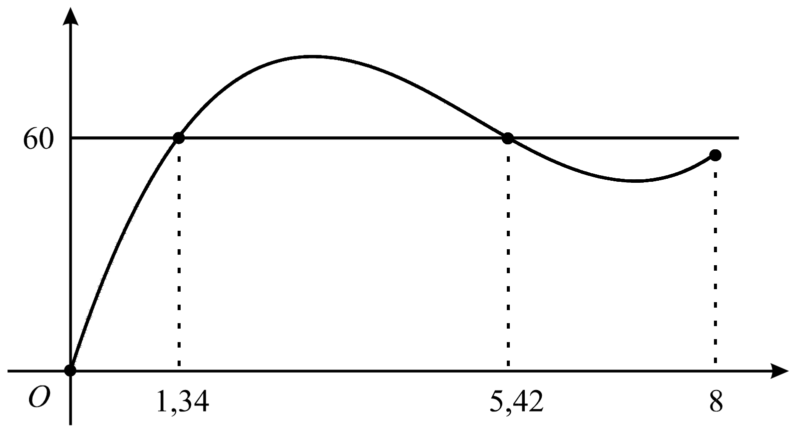
$$\Leftrightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 21}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{10 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \vee t = 7$$

t	0		3		7		8
$v'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$v(t)$	0	$\nearrow$	81	$\searrow$	49	$\nearrow$	56

Portanto, a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência, foi de 81 centenas de rotações por minuto.

2.2. Comecemos por observar que $6\,000$ (rotações por minuto) é igual a 60 centenas (de rotações por minuto).
Temos, assim, de começar por resolver a inequação $v(t) > 60$.
Na figura está representado o gráfico da função v, bem como a recta de equação $y = 60$.



Assinalaram-se os pontos de intersecção do gráfico de v com a recta, bem como as respectivas abcissas, com duas casas decimais, conforme era pedido no enunciado.

Portanto, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a $6\,000$ rotações por minuto durante $5{,}42 - 1{,}34$ minutos, ou seja, durante $4{,}08$ minutos.

Atendendo a que $0{,}08 \times 60 \approx 5$, podemos concluir que a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a $6\,000$ rotações por minuto durante 4 minutos e 5 segundos.

3.

3.1. Resulta da figura que $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$

Pretende-se saber $5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha)$

Ora, $5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha) = 5\cos\alpha - 2\cos\alpha = 3\cos\alpha$

Portanto, sabemos que $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$ e queremos saber o valor de $3\cos\alpha$

Tem-se: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Vem, então: $1 + \left(\sqrt{8}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9}$

Como α é um ângulo cujo lado extremidade está no terceiro quadrante, tem-se que $\cos\alpha < 0.$

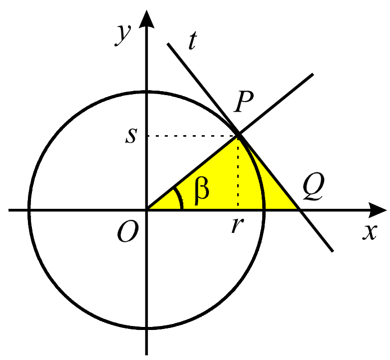
Portanto, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

Vem então que $3\cos\alpha = -1$

3.2. Apresentamos a seguir três possíveis processos de resolução:

1º Processo:

Seja β a amplitude do ângulo QOP.



Por um lado, tem-se que $\cos\beta = r$

Por outro lado, tem-se que

$$\cos\beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\overline{OQ}}$$

Portanto, $\frac{1}{\overline{OQ}} = r$, donde $\overline{OQ} = \frac{1}{r}$

Portanto, a recta t intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa $\frac{1}{r}$

2º Processo:

Seja x a abcissa do ponto Q. Como este ponto pertence ao eixo Ox, a sua ordenada é zero.

Tem-se assim que Q tem coordenadas $(x, 0)$.

Como a recta t é tangente à circunferência no ponto P, os vectores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{PQ} = 0$.

Como $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, 0) - (r, s) = (x - r, \, - s)$, vem:

$$\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (r, s) . (x - r, \, - s) = 0 \Leftrightarrow r\,x - r^2 - s^2 = 0 \Leftrightarrow r\,x = r^2 + s^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r\,x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{r}$$

3º Processo:

Tem-se que $\overrightarrow{OP} = (r, s)$, pelo que um vector director da recta t é o vector $\overrightarrow{u} = (-s, r)$

O declive da recta t é, portanto, igual a $-\frac{r}{s}$

A equação reduzida da recta t é, assim, da forma $y = -\frac{r}{s}\,x + b$

Como o ponto $P(r, s)$ pertence a esta recta, tem-se que $s = -\frac{r}{s}\,r + b$,

donde vem $b = s + \frac{r}{s}\,r = s + \frac{r^2}{s} = \frac{s^2 + r^2}{s} = \frac{1}{s}$

A equação reduzida da recta t é $y = -\frac{r}{s}\,x + \frac{1}{s}$

A abcissa do ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox é a solução da equação

$0 = -\frac{r}{s}\,x + \frac{1}{s}$ (onde x é a incógnita).

Ora, $0 = -\frac{r}{s}\,x + \frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{r}{s}\,x = \frac{1}{s} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{r}{s}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{s} \times \frac{s}{r} \Leftrightarrow x = \frac{1}{r}$$