

TESTE INTERMÉDIO

11.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

10/Maio/2007

MATEMÁTICA A

VERSÃO 4

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

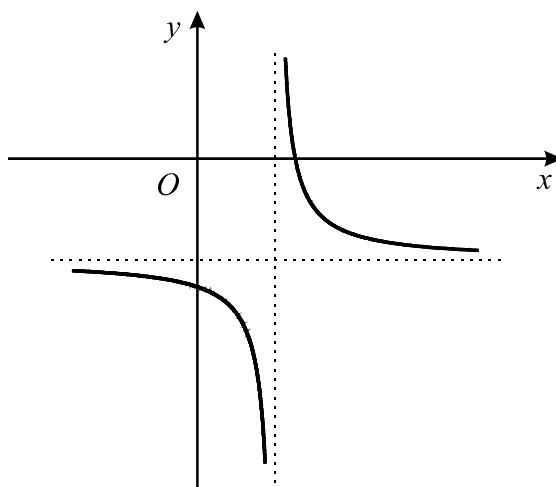
O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Para um certo valor de a e para um certo valor de b , a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \wedge b > 0$

(B) $a < 0 \wedge b > 0$

(C) $a > 0 \wedge b < 0$

(D) $a < 0 \wedge b < 0$

2. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2 + 4}{1 - x} > 0$

- (A) $] - \infty, 1[$ (B) $] 1, + \infty[$ (C) $] - 2, 1[$ (D) $] 1, 2[$

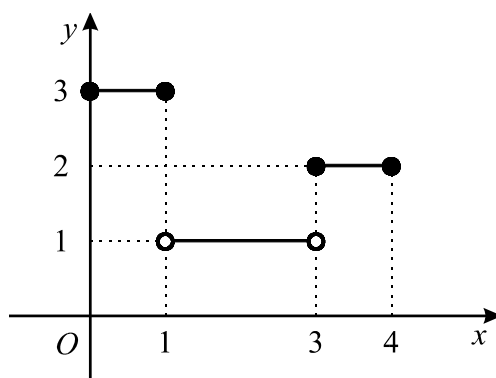
3. Considere as seguintes funções:

$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ definida pela tabela

| | | | |
|--------|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 3 | 1 | 2 |

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 1$

$h : [0, 4] \rightarrow \{1, 2, 3\}$ cujo gráfico é



Indique o valor de $f^{-1}(1) + (g \circ h)(\pi)$

- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

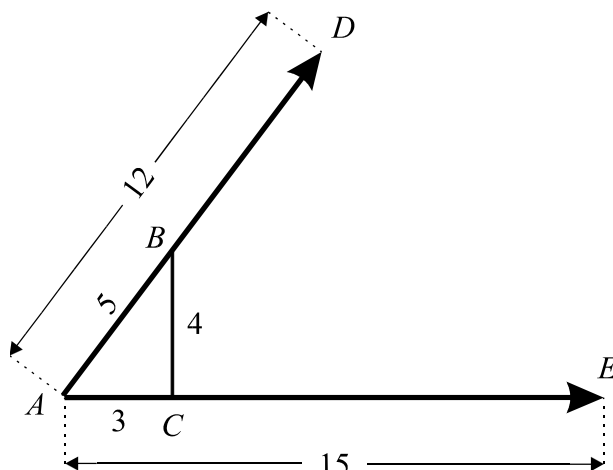
4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 3 + x^2$

Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$

Qual é a inclinação da recta t ?

- (A) 150° (B) 135° (C) 45° (D) 30°

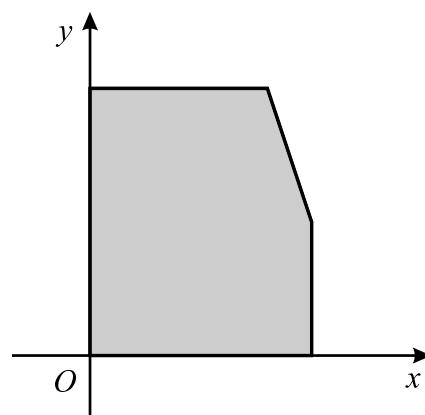
5. Na figura estão representados dois vectores, \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AE} , de normas 12 e 15, respectivamente. No segmento de recta $[AD]$ está assinalado um ponto B . No segmento de recta $[AE]$ está assinalado um ponto C . O triângulo $[ABC]$ é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.



Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$

- (A) 144 (B) 134 (C) 128 (D) 108
6. Indique as soluções da equação $4 + 2 \sin x = 5$ que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$
- (A) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$
- (C) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$
7. Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ 3x + y \leq 18 \end{cases}$$



Qual é o valor máximo que a função objectivo, definida por $z = x + y$, pode alcançar nesta região?

- (A) 14 (B) 12 (C) 10 (D) 8

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo dos primeiros seis minutos da experiência, de acordo com a função

$$v(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t$$

onde t designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do início da experiência, e $v(t)$ designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em **centenas** de rotações por minuto).

- 1.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, nos primeiros seis minutos da experiência. Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto.
- 1.2. Recorrendo às **capacidades gráficas da calculadora**, determine durante quanto tempo é que, nos primeiros seis minutos da experiência, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 4 600 rotações por minuto. Escreva o **resultado final em minutos e segundos** (com o número de segundos arredondado às unidades). Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema (apresente as **abscissas com duas casas decimais**).

2. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P(0, 3, 4)$

- 2.1. Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à recta de equação vectorial $(x, y, z) = (-1, 0, 5) + k(2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$. Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 4)^2 \leq 7$.

Sugere-se que:

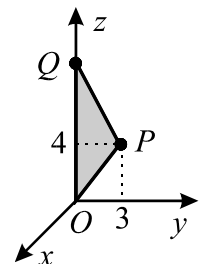
- Determine uma equação do plano α .
- Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α .
- Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.

- 2.2. Admita que um ponto Q se desloca ao longo do semieixo positivo Oz , nunca coincidindo com a origem O do referencial.

Seja f a função que faz corresponder, à cota z do ponto Q , o perímetro do triângulo $[OPQ]$.

- 2.2.1. Mostre que $f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 8z + 25}$

- 2.2.2. **Sem recorrer à calculadora**, determine a cota do ponto Q de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 18.



3.

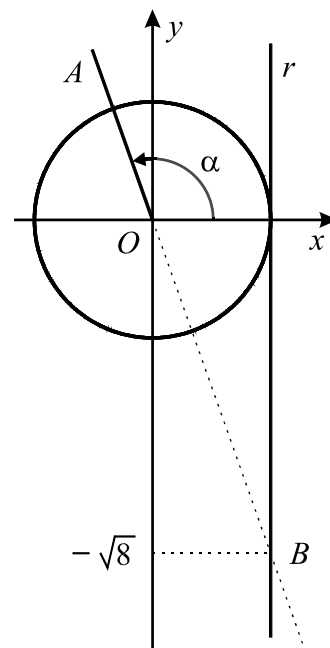
3.1. Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy :

- o círculo trigonométrico
- a recta r , de equação $x = 1$
- o ângulo, de amplitude α , que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\hat{O}A$
- o ponto B , intersecção do prolongamento da semi-recta $\hat{O}A$ com a recta r .

Como a figura sugere, a ordenada de B é $-\sqrt{8}$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$8 \cos (4\pi - \alpha) + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$$



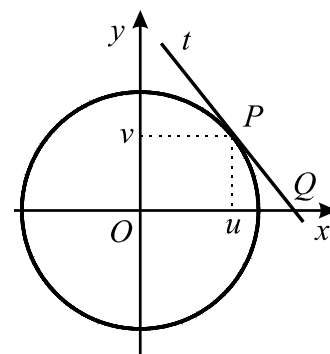
3.2. Considere agora um ponto P , do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.

Sejam (u, v) as coordenadas do ponto P .

Seja t a recta tangente à circunferência no ponto P .

Seja Q o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox .

Prove que a abcissa do ponto Q é $\frac{1}{u}$



FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 137

1. 40

1.1.20

1.2.20

2. 57

2.1. 19

2.2. 38

2.2.1. 19

2.2.2. 19

3. 40

3.1.20

3.2.20

TOTAL 200