

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

**12.º Ano de Escolaridade**

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

15/Março/2007

**VERSÃO 2**

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta, alguns subdivididos em alíneas, num total de seis.

# Formulário

## Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

## Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

## Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

## Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

Prog. Aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

## Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ), ambos com probabilidade não nula. Sabe-se que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . Qual é o valor da probabilidade condicionada  $P(B|A)$ ?

(A)  $P(B)$

(B)  $\frac{P(B)}{P(A)}$

(C) 1

(D) 0

2. Um saco contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números. Qual é a probabilidade de o maior desses três números ser 9?

(A)  $\frac{24}{{}^{20}C_3}$

(B)  $\frac{28}{{}^{20}C_3}$

(C)  $\frac{32}{{}^{20}C_3}$

(D)  $\frac{36}{{}^{20}C_3}$

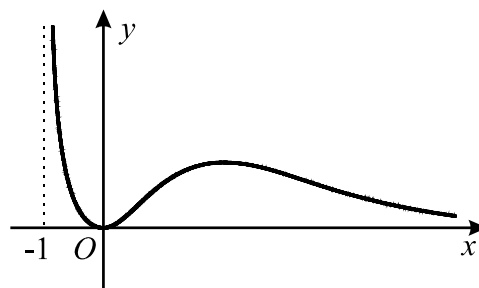


6. Seja  $g$  uma função de domínio  $\mathbb{R}^+$   
 Sabe-se que a recta de equação  $y = 5x + 1$  é assíntota do gráfico de  $g$   
 Indique o valor de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 5x) \right]$$

- (A) 0                      (B) 5                      (C) 6                      (D)  $+\infty$

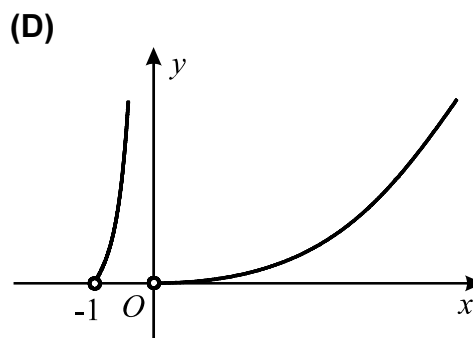
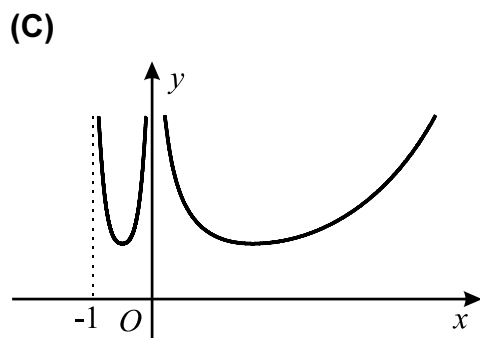
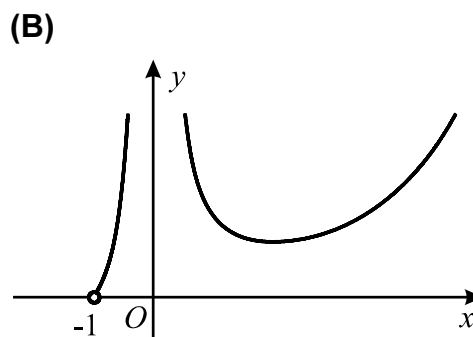
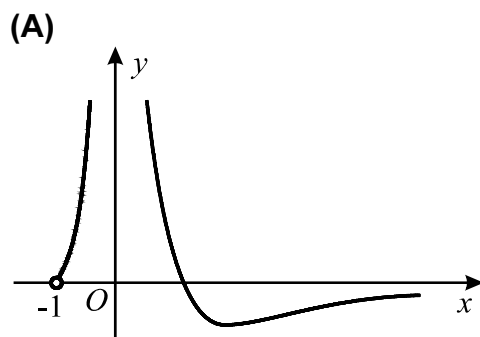
7. Na figura está representada, em referencial  $xOy$ , parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $] -1, +\infty [$ , contínua em todo o seu domínio.



Tal como a figura sugere, tem-se:

- o gráfico de  $f$  contém a origem do referencial;
- as rectas de equações  $y = 0$  e  $x = -1$  são assíntotas do gráfico de  $f$ .

Em qual das opções seguintes poderá estar representada, em referencial  $xOy$ , parte do gráfico de  $\frac{1}{f}$  ?



## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu  $pH$ , que é dado por

$$pH = -\log_{10}(x)$$

onde  $x$  designa a concentração de iões  $H_3O^+$ , medida em  $mol/dm^3$ .

**Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

- 1.1. Admita que o  $pH$  da saliva é 6,7.

Qual é a concentração (em  $mol/dm^3$ ) de iões  $H_3O^+$ , na saliva?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma  $a \times 10^b$ , com  $b$  inteiro e  $a$  entre 1 e 10. Apresente o valor de  $a$  arredondado às unidades.

- 1.2. A concentração de iões  $H_3O^+$  no sumo de limão é quádrupla da concentração de iões  $H_3O^+$  no vinagre.

Qual é a diferença entre o  $pH$  do vinagre e o  $pH$  do sumo de limão? Apresente o resultado arredondado às décimas.

**Sugestão:** comece por designar por  $v$  a concentração de iões  $H_3O^+$  no *vinagre* e por exprimir, em função de  $v$ , a concentração de iões  $H_3O^+$  no sumo de limão.

2. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - x} & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ \frac{4x^2 - x \ln(x+1)}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ )

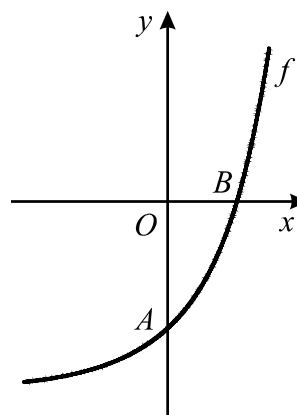
Utilizando métodos exclusivamente analíticos, averigúe se a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ . Justifique a sua resposta.

3. Seja  $k$  um número real maior do que 1.

Na figura está representada uma parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x - k$ .

Tal como a figura sugere

- $A$  é o ponto de intersecção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Oy$
- $B$  é o ponto de intersecção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$



Mostre que:

Se o declive da recta  $AB$  é  $k - 1$ , então  $k = e$

4. Considere, num referencial o. n.  $xOy$ ,

- a curva  $C$ , que representa graficamente a função  $f$ , de domínio  $[0, 1]$ , definida por  $f(x) = e^x + 4x$
- a recta  $r$ , de equação  $y = 6$

4.1. **Sem recorrer à calculadora**, justifique que a recta  $r$  intersecta a curva  $C$  em pelo menos um ponto.

4.2. **Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, visualize a curva  $C$  e a recta  $r$ , na janela  $[0, 1] \times [0, 7]$  (janela em que  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 7]$ ).

Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva  $C$  e a recta  $r$ , visualizados na calculadora.

Assinale ainda os pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$ , em que:

- $O$  é a origem do referencial;
- $P$  é o ponto de coordenadas  $(0, e)$ ;
- $Q$  é o ponto de intersecção da curva  $C$  com a recta  $r$ ; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

Desenhe o triângulo  $[OPQ]$  e **determine a sua área**. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I ..... 63**

Cada resposta certa ..... 9  
Cada resposta errada..... 0  
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Grupo II ..... 137**

**1. .... 42**

**1.1. .... 20**

**1.2. .... 22**

**2. .... 24**

**3. .... 24**

**4. .... 47**

**4.1. .... 23**

**4.2. .... 24**

**TOTAL ..... 200**