TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

15 de Março de 2007

RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

Grupo I

1. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, resulta que $P(A \cap B) = 0$

Portanto, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$

Resposta **D**

2. Número de casos possíveis:

O número de casos possíveis é ${}^{20}C_3$ (número de maneiras de escolher três bolas, de entre vinte).

Número de casos favoráveis:

O maior dos números saídos é 9 se, e só se:

- for escolhida a bola número 9;
- as outras duas bolas forem escolhidas de entre as bolas numeradas de 1 a 8.

Portanto,

- para a bola número 9, existe apenas uma hipótese,
- para as outras duas bolas, existem ${}^{8}C_2$ hipóteses.

O número de casos favoráveis é, assim, $1 \times {}^{8}C_2 = 28$

A probabilidade pedida é $\dfrac{28}{{}^{20}C_3}$

Resposta **B**

3. Com duas das seis moedas,

- não é possível obter 40 cêntimos, na opção A;
- não é possível obter 20 cêntimos, na opção B.

Estas duas opções estão, assim, excluídas.

Relativamente às opções C e D, os valores que a variável X pode tomar são os que constam da tabela. Para escolher uma destas opções, calculemos, para cada uma delas, por exemplo, $P(X = 20)$.

No caso da opção C, tem-se $P(X = 20) = \dfrac{{}^{2}C_2}{{}^{6}C_2} = \dfrac{1}{{}^{6}C_2}$

No caso da opção D, tem-se $P(X = 20) = \dfrac{{}^{3}C_2}{{}^{6}C_2} = \dfrac{3}{{}^{6}C_2}$

Resposta **C**

4. $\frac{1}{e^x} < e \Leftrightarrow e^{-x} < e^1 \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow x > -1$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{A}}$

5. $\log_a\left(a \times \sqrt[4]{a}\right) = \log_a(a) + \log_a\left(\sqrt[4]{a}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{D}}$

6. $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{g(x)}{x} \times \left(g(x) - 5x\right)\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty}\left(g(x) - 5x\right) = 5 \times 1 = 5$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

7. Tem-se que: $\lim_{x\to-1}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

Grupo II

1.

1.1. Tem-se: $-\log_{10}(x) = 6{,}7 \Leftrightarrow \log_{10}(x) = -6{,}7 \Leftrightarrow x = 10^{-6{,}7}$

Logo, $x \approx 2 \times 10^{-7}$

Portanto, a concentração de iões H_3O^+, na saliva é, aproximadamente, de $2 \times 10^{-7}\ mol/dm^3$.

1.2. De acordo com a sugestão, designemos por v a concentração de iões H_3O^+ no vinagre.
Então, a concentração de iões H_3O^+ no sumo de limão é dada por $4v$ (pois, de acordo com o enunciado, a concentração de iões H_3O^+ no sumo de limão é quádrupla da concentração de iões H_3O^+ no vinagre).
Assim, a diferença entre o pH do vinagre e o pH do sumo de limão é igual a

$$\underbrace{-\log_{10}(v)}_{pH\text{ do vinagre}} - \underbrace{\left[-\log_{10}(4v)\right]}_{pH\text{ do sumo de limão}}$$

Tem-se que:

$$-\log_{10}(v) - \left[-\log_{10}(4v)\right] = -\log_{10}(v) + \log_{10}(4v) =$$

$$= -\log_{10}(v) + \log_{10}(4) + \log_{10}(v) = \log_{10}(4) \approx 0{,}6$$

Portanto, a diferença entre o pH do vinagre e o pH do sumo de limão é igual a $0{,}6$

2. Tem-se que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x^2 - 3)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 3}{x - 1} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x^2 - x \ln(x+1)}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{4x^2}{x^2} - \frac{x \ln(x+1)}{x^2} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left[4 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right] =$$

$$= 4 - 1 = 3$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$, podemos concluir que $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$.

Como $f(0) = 3$, resulta que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, pelo que a função é contínua em $x = 0$.

3. Tem-se que

$$f(0) = e^0 - k = 1 - k$$

pelo que o ponto A tem coordenadas $(0, 1-k)$.

Tem-se também que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - k = 0 \Leftrightarrow e^x = k \Leftrightarrow x = ln(k)$$

pelo que o ponto B tem coordenadas $(ln(k), 0)$.

Portanto, $\overrightarrow{AB} = B - A = (ln(k), 0) - (0, 1-k) = (ln(k), k-1)$

O declive da recta AB é, portanto, $\frac{k-1}{ln(k)}$

Tem-se, então, $\frac{k-1}{ln(k)} = k - 1 \Leftrightarrow ln(k) = 1 \Leftrightarrow k = e$

4.

4.1. Dizer que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto equivale a dizer que existe pelo menos um elemento do domínio de f que é solução da equação $f(x) = 6$.

A função f é contínua no intervalo $[0,1]$, pois é soma de duas funções contínuas.

Como $f(0) = 1$, tem-se que $f(0) < 6$.

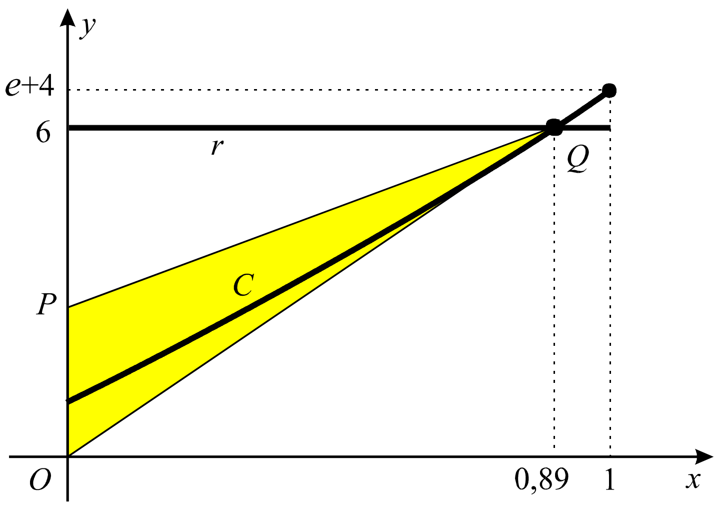
Como $f(1) = e + 4 \approx 2{,}7 + 4 = 6{,}7$ tem-se que $f(1) > 6$

Como a função f é contínua no intervalo $[0,1]$, e como $f(0) < 6 < f(1)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que, no intervalo $]0,1[$, existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = 6$, pelo que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

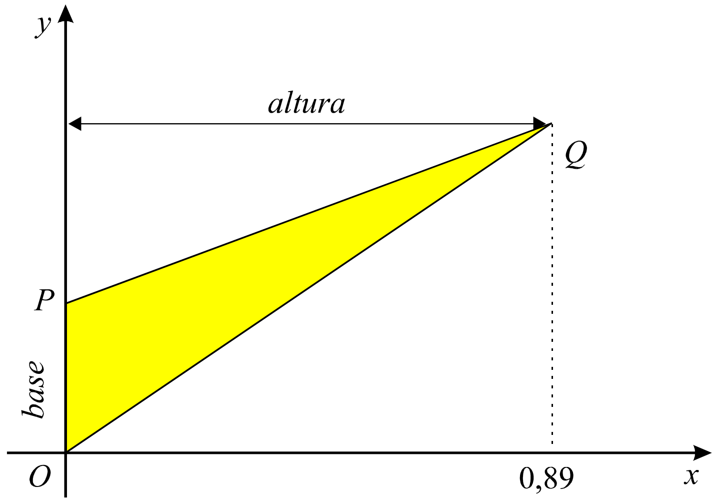
4.2. Representa-se a seguir o referencial, a curva C e a recta r, visualizados na calculadora.

Representa-se também o triângulo $[OPQ]$, onde O é a origem do referencial, P é o ponto de coordenadas $(0\ ,\ e)$ e Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta r.

Indica-se ainda, com duas casas decimais, a abcissa de Q, determinada com recurso às ferramentas adequadas da calculadora.



Na figura seguinte está apenas representado o triângulo $[OPQ]$.



Determinemos a área deste triângulo.

Tomando para base o segmento $[OP]$, a altura correspondente é o segmento em que:

- um dos extremos é o vértice oposto a essa base, ou seja, o ponto Q;
- o outro extremo é o ponto de intersecção da recta que contém a base com a recta que lhe é perpendicular e que passa por Q.

A área do triângulo é, portanto, $\frac{base \times altura}{2} \approx \frac{e \times 0{,}89}{2} \approx 1{,}2$