

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

15/Março/2007

VERSÃO 3

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta,
alguns subdivididos em alíneas, num total de seis.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula. Sabe-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $P(A)$

(B) $\frac{P(A)}{P(B)}$

(C) 0

(D) 1

2. Um saco contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números.

Qual é a probabilidade de o maior desses três números ser 10 ?

(A) $\frac{24}{{}^{20}C_3}$

(B) $\frac{28}{{}^{20}C_3}$

(C) $\frac{32}{{}^{20}C_3}$

(D) $\frac{36}{{}^{20}C_3}$

3. O Jorge tem seis moedas no bolso. Ele retira, simultaneamente e ao acaso, duas dessas seis moedas. Seja X a quantia, em cêntimos, correspondente às duas moedas retiradas. Sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	20	30	40	60	70
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6C_2}$	$\frac{6}{6C_2}$	$\frac{1}{6C_2}$	$\frac{3}{6C_2}$	$\frac{2}{6C_2}$

Quais poderiam ser as seis moedas que o Jorge tinha inicialmente no bolso?



4. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $e^{-x} > \frac{1}{e}$

- (A) $] - 1, + \infty [$ (B) $] 1, + \infty [$
 (C) $] - \infty, - 1 [$ (D) $] - \infty, 1 [$

5. Seja a um número real maior do que 1. Indique o valor de $\log_a (a \times \sqrt[3]{a})$

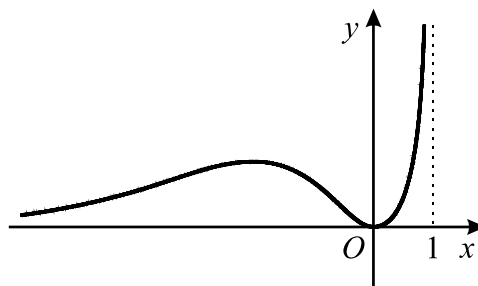
- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{4}$

6. Seja g uma função de domínio \mathbb{R}^+ .
Sabe-se que a recta de equação $y = 2x + 3$ é assíntota do gráfico de g .
Indique o valor de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x) \right]$$

- (A) 0 (B) 5 (C) 6 (D) $+\infty$

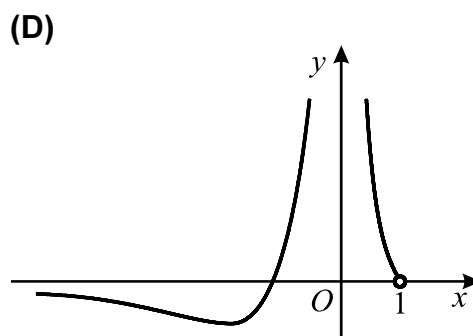
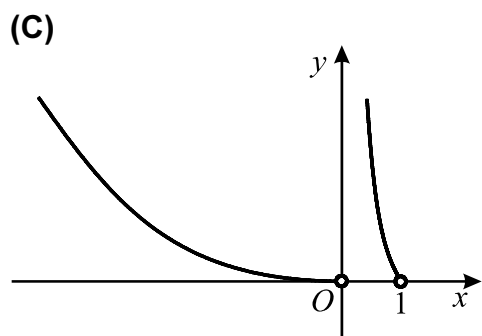
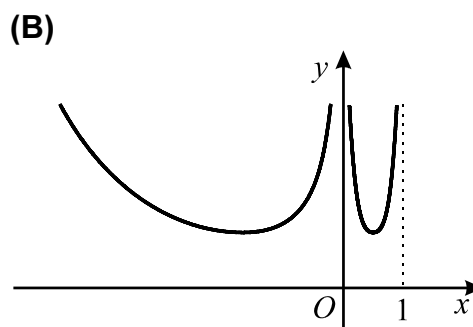
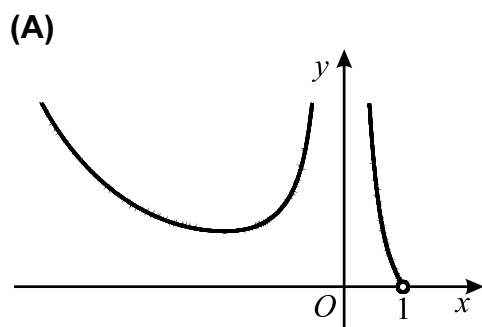
7. Na figura está representada, em referencial xOy , parte do gráfico de uma função f , de domínio $] -\infty, 1[$, contínua em todo o seu domínio.



Tal como a figura sugere, tem-se:

- o gráfico de f contém a origem do referencial;
- as rectas de equações $y = 0$ e $x = 1$ são assíntotas do gráfico de f .

Em qual das opções seguintes poderá estar representada, em referencial xOy , parte do gráfico de $\frac{1}{f}$?



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu pH , que é dado por

$$pH = -\log_{10}(x)$$

onde x designa a concentração de iões H_3O^+ , medida em mol/dm^3 .

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

- 1.1. Admita que o pH do sangue arterial humano é 7,4.

Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+ , no sangue arterial humano?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10. Apresente o valor de a arredondado às unidades.

- 1.2. A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite.

Qual é a diferença entre o pH do leite e o pH do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.

Sugestão: comece por designar por l a concentração de iões H_3O^+ no *leite* e por exprimir, em função de l , a concentração de iões H_3O^+ no *café*.

2. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{3x^2 - x \ln(x+1)}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(\ln designa logaritmo de base e)

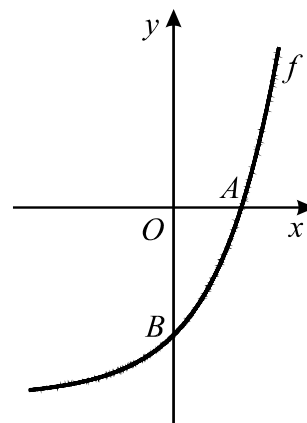
Utilizando métodos exclusivamente analíticos, averigúe se a função f é contínua em $x = 0$. Justifique a sua resposta.

3. Seja c um número real maior do que 1.

Na figura está representada uma parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x - c$.

Tal como a figura sugere

- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox
- B é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy



Mostre que:

Se o declive da recta AB é $c - 1$, então $c = e$

4. Considere, num referencial o. n. xOy ,

- a curva C , que representa graficamente a função f , de domínio $[0, 1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$
- a recta r , de equação $y = 5$

4.1. **Sem recorrer à calculadora**, justifique que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

4.2. **Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, visualize a curva C e a recta r , na janela $[0, 1] \times [0, 7]$ (janela em que $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 7]$).

Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva C e a recta r , visualizados na calculadora.

Assinale ainda os pontos O , P e Q , em que:

- O é a origem do referencial;
- P é o ponto de coordenadas $(0, e)$;
- Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta r ; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

Desenhe o triângulo $[OPQ]$ e **determine a sua área**. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 137

1. 42

1.1. 20

1.2. 22

2. 24

3. 24

4. 47

4.1. 23

4.2. 24

TOTAL 200