

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

15 de Março de 2007

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO - VERSÃO 4

---

### COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa .....	9
Cada resposta errada.....	0
Cada questão não respondida ou anulada .....	0
<b>Grupo II</b> .....	<b>137</b>
<b>1.</b> .....	24
<b>2.</b> .....	42
<b>2.1.</b> .....	20
<b>2.2.</b> .....	22
<b>3.</b> .....	47
<b>3.1.</b> .....	23
<b>3.2.</b> .....	24
<b>4.</b> .....	24
<b>TOTAL</b> .....	<b>200</b>

## Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o aluno dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

<b>Itens</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>Respostas</b>	C	A	B	D	B	A	C

## Grupo II

### Critérios gerais

1. Se o aluno se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.
2. Se o aluno apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.
3. As classificações a atribuir às respostas dos alunos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.
4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a classificação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
  - Se o aluno se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser de 0 (zero) pontos.
  - Se o aluno não se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser a soma algébrica das classificações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9, 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a classificação a atribuir é de 0 (zero) pontos.
5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o aluno utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

**6.** A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o aluno deve percorrer para o resolver.

**6.1.** Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

**6.2.** O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.

Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a classificação de 0 (zero) pontos.

Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a classificação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

**6.3.** Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do aluno numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma classificação diferente das cotações indicadas.

**6.4.** No caso de o aluno cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o aluno as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

**6.5.** Caso o aluno cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo aluno, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

**6.6.** Pode acontecer que o aluno, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo aluno, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, "em minutos", "em percentagem", etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo aluno não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o aluno o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o aluno não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o aluno escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o aluno deve apresentar o valor exacto. Se o aluno apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.
  
8. O aluno deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o aluno não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a classificação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente classificadas com 0 (zero) pontos.
  
9. O aluno deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, "sem recorrer à calculadora", "equacione o problema", "resolva graficamente", etc.). Na resolução apresentada pelo aluno, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o aluno não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito, bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser classificadas com 0 (zero) pontos.
  
10. Se, na resolução de um item, o aluno utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas classificadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.
  
11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o aluno deve conservar, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na classificação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ..... -2 pontos

## Critérios específicos

### 1. .... 24

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (ver nota 1) .....	10
Factorizar o numerador .....	3
Factorizar o denominador .....	3
Simplificar a fracção.....	2
Calcular o limite da fracção simplificada .....	2
Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (ver nota 1) .....	10
Escrever a expressão como diferença de duas fracções .....	3
Simplificar as fracções.....	3
Calcular o limite da expressão obtida .....	4
Conclusão (ver nota 2) .....	4

#### Notas:

1. Não se exige que o aluno explicita o tipo de indeterminação. No entanto, caso o aluno se limite a fazê-lo, deverá ser atribuída a esta etapa a classificação de 1 ponto.
2. A classificação desta etapa deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O aluno conclui correctamente e apresenta uma justificação completa.....	4
O aluno conclui correctamente, mas apresenta uma justificação incompleta (por exemplo, refere a igualdade dos limites laterais, mas não refere a igualdade destes ao valor da função no ponto) .....	2
O aluno conclui correctamente, mas não apresenta qualquer justificação .....	1
Outras situações .....	0

**2.1. .... 20**

Equacionar o problema ..... 5

$-\log_{10}(x) = 6,7 \Leftrightarrow x = 10^{-6,7}$  (ver nota 1) ..... 10

Apresentação do resultado na forma  $a \times 10^b$  (ver nota 2) ..... 5

**Notas:**

1. Esta etapa deverá ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Obtém correctamente  $x = 10^{-6,7}$  ..... 10

Obtém  $x = 10^{6,7}$  ..... 3

Outras situações (por exemplo,  $x = -10^{6,7}$  ou  $x = 6,7^{10}$ ) ..... 0

2. A classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de zero pontos, caso o aluno, na etapa anterior, tenha obtido um valor negativo. Não sendo este o caso, a classificação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Resultado correcto (de acordo com a etapa anterior)  
e apresentado na forma pedida ..... 5

Resultado correcto (de acordo com a etapa anterior)  
e apresentado na forma pedida, mas o valor de  $a$   
não está arredondado às unidades, ou está mal  
arredondado ..... 3

Outras situações ..... 0

$$pH \text{ do vinagre} = -\log_{10}(v) \dots\dots\dots 1$$

$$pH \text{ do sumo de limão} = -\log_{10}(4v) \dots\dots\dots 3$$

$$pH \text{ do vinagre} - pH \text{ do sumo de limão} = -\log_{10}(v) + \log_{10}(4v) \dots\dots 5$$

$$\begin{aligned} -\log_{10}(v) + \log_{10}(4v) &= \\ &= -\log_{10}(v) + \log_{10}(4) + \log_{10}(v) \\ \text{ou} \\ &= \log_{10}\left(\frac{4v}{v}\right) \quad \text{(ver nota 2)} \dots\dots\dots 9 \end{aligned}$$

$$pH \text{ do vinagre} - pH \text{ do sumo de limão} = \log_{10}(4) \dots\dots\dots 2$$

$$pH \text{ do vinagre} - pH \text{ do sumo de limão} \approx 0,6 \dots\dots\dots 2$$

**Notas:**

1. Se o aluno traduzir o pedido por meio de uma equação (como, por exemplo,  $-\log_{10}(v) + \log_{10}(4v) = 0$ ), a classificação total a atribuir à resposta deverá ser de 0 (zero) pontos.
2. Exige-se que o aluno explicita esta etapa (aplicação das propriedades dos logaritmos). Se a etapa não estiver explicitada, não deverá ser atribuída a respectiva cotação.

**3.1. .... 23**

Calcular  $f(0)$  (ou  $f(0) - 6$ ) .....4

Calcular  $f(1)$  (ou  $f(1) - 6$ ) .....4

Referir a continuidade de  $f$  .....4

Referir que  $f(0) < 6 < f(1)$  (ou referir que  $f(0) - 6$  e  $f(1) - 6$  têm sinais contrários) ..... 6

Concluir o pretendido, evocando o Teorema de Bolzano (**ver nota 1**) ..... 5

**Notas:**

1. Se o aluno concluir o pretendido, mas não referir que tal conclusão resulta do Teorema de Bolzano (ou do seu corolário), a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de 2 pontos.
2. Não se exige que o aluno explicita a equação  $e^x + 4x = 6$ . No entanto, caso o aluno se limite a fazê-lo, deverá ser atribuída à sua resposta a classificação de 3 pontos.

Desenho pedido ..... 9

    Reprodução correcta do referencial, da curva  $C$  e da recta  $r$ , de acordo com a janela indicada no enunciado (**ver nota 1**) ..... 2

    Representação correcta do ponto  $O$  ..... 1

    Representação correcta do ponto  $P$  (**ver nota 2**) ..... 4

    Representação correcta do ponto  $Q$  ..... 1

    Desenho do triângulo  $[OPQ]$  ..... 1

Abcissa do ponto  $Q$  (**ver nota 3**) ..... 6

Cálculo da área do triângulo  $[OPQ]$  (**ver notas 4 e 5**) ..... 9

**Notas:**

1. Se o aluno reproduzir incorrectamente pelo menos um dos três elementos referidos (referencial, curva  $C$  e recta  $r$ ), esta etapa deverá ser classificada com 0 (zero) pontos.
2. Esta etapa deverá ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Ponto  $P$  no eixo das ordenadas, entre os pontos de intersecção da recta  $r$  e da curva  $C$  com este eixo, e ligeiramente mais próximo deste do que daquele ..... 4

Ponto  $P$  no eixo das ordenadas, entre os pontos de intersecção da curva  $C$  e da recta  $r$  com este eixo, mas não cumprindo a outra condição (referida no nível anterior) ..... 2

Outras situações ..... 0

3. Esta etapa deverá ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1º Caso (apresentação da abcissa de  $Q$  com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

0,89 ..... 6

0,88 ou 0,90 ..... 3

Outros valores ..... 0

2º Caso (apresentação da abcissa de  $Q$  com mais de duas casas decimais):

Valor no intervalo $[0,887; 0,894]$ .....	4
Valor não pertencente ao intervalo anterior, mas no intervalo $[0,880; 0,900]$ .....	2
Outras situações .....	0

3º Caso (apresentação da abcissa de  $Q$  com uma casa decimal):

0,9 .....	2
Outros valores .....	0

4. O cálculo da área pedida pode ser feito por, pelo menos, dois processos:

1º Processo (o aluno toma para base do triângulo o segmento  $[OP]$ ):

$$\text{Área pedida} = \frac{e \times 0,89}{2} \dots\dots\dots 7$$

Resultado final (correctamente arredondado às décimas) .....

2º Processo (o aluno toma para base do triângulo o segmento  $[OQ]$ ):

Norma de  $\overrightarrow{OQ}$  .....

Equação da recta  $OQ$  .....

Equação da recta perpendicular a  $OQ$  que passa por  $P$  .....

Intersecção das duas rectas .....

Determinação da altura correspondente à base considerada.....

$$\text{Área pedida} = \frac{6,07 \times 0,40}{2} \dots\dots\dots 2$$

Resultado final (correctamente arredondado às décimas) .....

5. Se, por deficiente representação do triângulo  $[OPQ]$ , o grau de dificuldade desta etapa diminuir, nomeadamente pelo facto do triângulo, desenhado pelo aluno, ter a altura, correspondente à base  $[OP]$ , no interior do triângulo, a classificação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser de 4 pontos (ver critério geral 6.5).

Coordenadas de $A$ .....	3
$f(0) = 1 - k$ .....	2
$A(0, 1 - k)$ .....	1

Coordenadas de $B$ .....	4
Escrever a equação $f(x) = 0$ .....	1
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(k)$ .....	2
$B(\ln(k), 0)$ .....	1

Declive da recta $AB$ .....	8
-----------------------------	---

Conclusão .....	9
Escrever $\frac{k-1}{\ln(k)} = k - 1$ .....	1
$\frac{k-1}{\ln(k)} = k - 1 \Leftrightarrow \ln(k) = 1$ .....	4
$\ln(k) = 1 \Leftrightarrow k = e$ .....	4

**Nota:**

Se o aluno provar a implicação contrária da que se pretende, isto é, se começar por substituir  $k$  por  $e$  e concluir que o declive da recta  $AB$  é  $e - 1$ , a classificação máxima a atribuir à resposta deverá ser de 10 pontos.