

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

15 de Março de 2007

RESOLUÇÃO - VERSÃO 3

Grupo I

1. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, resulta que $P(A \cap B) = 0$

$$\text{Portanto, } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

Resposta **C**

2. Número de casos possíveis:

O número de casos possíveis é ${}^{20}C_3$ (número de maneiras de escolher três bolas, de entre vinte).

Número de casos favoráveis:

O maior dos números saídos é 10 se, e só se:

- for escolhida a bola número 10;
- as outras duas bolas forem escolhidas de entre as bolas numeradas de 1 a 9.

Portanto,

- para a bola número 10, existe apenas uma hipótese,
- para as outras duas bolas, existem 9C_2 hipóteses.

O número de casos favoráveis é, assim, $1 \times {}^9C_2 = {}^9C_2$

$$\text{A probabilidade pedida é } \frac{{}^9C_2}{{}^{20}C_3} = \frac{36}{{}^{20}C_3}$$

Resposta **D**

3. Com duas das seis moedas,

- não é possível obter 40 cêntimos, na opção A;
- não é possível obter 20 cêntimos, na opção B.

Estas duas opções estão, assim, excluídas.

Relativamente às opções C e D, os valores que a variável X pode tomar são os que constam da tabela. Para escolher uma destas opções, calculemos, para cada uma delas, por exemplo, $P(X = 20)$.

$$\text{No caso da opção C, tem-se } P(X = 20) = \frac{{}^2C_2}{{}^6C_2} = \frac{1}{{}^6C_2}$$

$$\text{No caso da opção D, tem-se } P(X = 20) = \frac{{}^3C_2}{{}^6C_2} = \frac{3}{{}^6C_2}$$

Resposta **D**

4. $e^{-x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{-x} > e^{-1} \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$ Resposta D

5. $\log_a (a \times \sqrt[3]{a}) = \log_a (a) + \log_a (\sqrt[3]{a}) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ Resposta C

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x) \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times 3 = 6$ Resposta C

7. Tem-se que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ Resposta A

Grupo II

1.

1.1. Tem-se: $-\log_{10}(x) = 7,4 \Leftrightarrow \log_{10}(x) = -7,4 \Leftrightarrow x = 10^{-7,4}$

Logo, $x \approx 4 \times 10^{-8}$

Portanto, a concentração de iões H_3O^+ , no sangue arterial humano é, aproximadamente, de $4 \times 10^{-8} \text{ mol/dm}^3$.

1.2. De acordo com a sugestão, designemos por l a concentração de iões H_3O^+ no leite.

Então, a concentração de iões H_3O^+ no café é dada por $3l$ (pois, de acordo com o enunciado, a concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite).

Assim, a diferença entre o pH do leite e o pH do café é igual a

$$\underbrace{-\log_{10}(l)}_{pH \text{ do leite}} - \underbrace{[-\log_{10}(3l)]}_{pH \text{ do café}}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} -\log_{10}(l) - [-\log_{10}(3l)] &= -\log_{10}(l) + \log_{10}(3l) = \\ &= -\log_{10}(l) + \log_{10}(3) + \log_{10}(l) = \log_{10}(3) \approx 0,5 \end{aligned}$$

Portanto, a diferença entre o pH do leite e o pH do café é igual a 0,5

2. Tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+2)}{x(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x^2+1} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - x \ln(x+1)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x \ln(x+1)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[3 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right] = \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Como $f(0) = 2$, resulta que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, pelo que a função é contínua em $x = 0$.

3. Tem-se que

$$f(0) = e^0 - c = 1 - c$$

pelo que o ponto B tem coordenadas $(0, 1 - c)$.

Tem-se também que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - c = 0 \Leftrightarrow e^x = c \Leftrightarrow x = \ln(c)$$

pelo que o ponto A tem coordenadas $(\ln(c), 0)$.

Portanto, $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1 - c) - (\ln(c), 0) = (-\ln(c), 1 - c)$

O declive da recta AB é, portanto, $\frac{1 - c}{-\ln(c)} = \frac{c - 1}{\ln(c)}$

Tem-se, então, $\frac{c - 1}{\ln(c)} = c - 1 \Leftrightarrow \ln(c) = 1 \Leftrightarrow c = e$

4.

- 4.1. Dizer que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto equivale a dizer que existe pelo menos um elemento do domínio de f que é solução da equação $f(x) = 5$.

A função f é contínua no intervalo $[0, 1]$, pois é soma de duas funções contínuas.

Como $f(0) = 1$, tem-se que $f(0) < 5$.

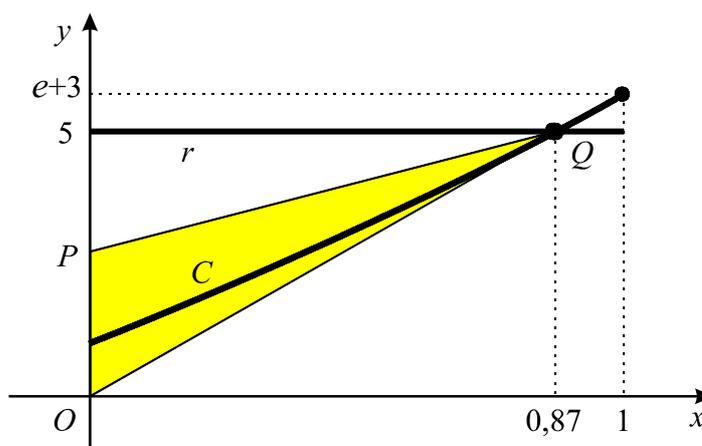
Como $f(1) = e + 3 \approx 2,7 + 3 = 5,7$ tem-se que $f(1) > 5$

Como a função f é contínua no intervalo $[0, 1]$, e como $f(0) < 5 < f(1)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que, no intervalo $]0, 1[$, existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = 5$, pelo que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

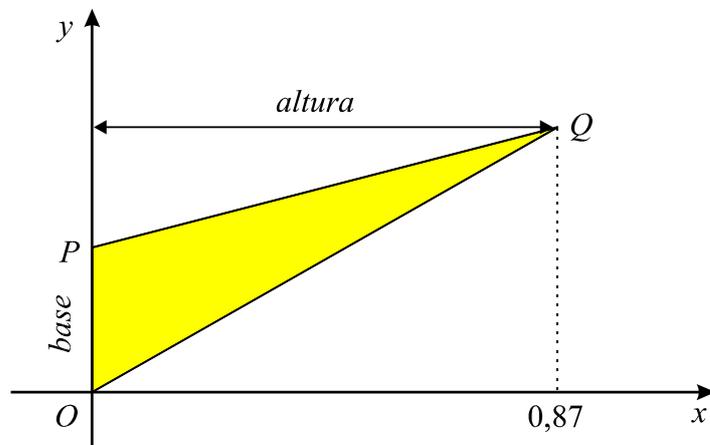
- 4.2. Representa-se a seguir o referencial, a curva C e a recta r , visualizados na calculadora.

Representa-se também o triângulo $[OPQ]$, onde O é a origem do referencial, P é o ponto de coordenadas $(0, e)$ e Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta r .

Indica-se ainda, com duas casas decimais, a abcissa de Q , determinada com recurso às ferramentas adequadas da calculadora.



Na figura seguinte está apenas representado o triângulo $[OPQ]$.



Determinemos a área deste triângulo.

Tomando para base o segmento $[OP]$, a altura correspondente é o segmento em que:

- um dos extremos é o vértice oposto a essa base, ou seja, o ponto Q ;
- o outro extremo é o ponto de intersecção da recta que contém a base com a recta que lhe é perpendicular e que passa por Q .

A área do triângulo é, portanto, $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \approx \frac{e \times 0,87}{2} \approx 1,2$