

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 29.04.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste.  
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas  
aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

## Formulário

### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

### Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

### Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

### Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

### Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

### Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

## Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada item, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera estar correcta.
- Se apresentar mais do que uma letra, a classificação será de zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Seja  $a$  um número real maior do que 1.

Indique qual das expressões seguintes é igual a  $\log_a 4 + 2 \log_a 5$

- (A)  $\log_a 30$       (B)  $\log_a 40$       (C)  $\log_a 75$       (D)  $\log_a 100$

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $f$  de domínio  $[0, +\infty[$

A recta  $r$ , de equação  $y = \frac{1}{2}x + 3$ , é assíntota do gráfico de  $f$

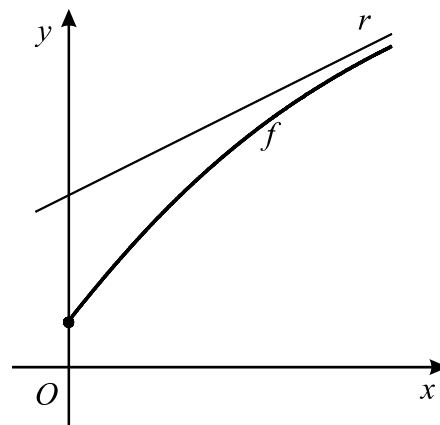
Seja  $h$  a função definida em  $[0, +\infty[$  por

$$h(x) = \frac{x}{f(x)}$$

O gráfico de  $h$  tem uma assíntota horizontal.

Qual das equações seguintes define essa assíntota?

- (A)  $y = \frac{1}{3}$       (B)  $y = \frac{1}{2}$       (C)  $y = 2$       (D)  $y = 3$





## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. De dois acontecimentos  $A$  e  $B$  ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ), de probabilidade não nula, sabe-se que:
- $P(A) = P(B)$
  - $P(A \cup B) = 7P(A \cap B)$
- Determine a probabilidade de acontecer  $B$ , sabendo que  $A$  aconteceu. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Considere o seguinte problema:

*Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e multiplicam-se os números saídos. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser igual a 6?*

Uma resposta correcta a este problema é  $\frac{3! + 3}{6^3}$

Numa pequena composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- uma referência à Regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

3. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes. Admita que,  $t$  anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{3\,000}{1 + k e^{-0,11t}}$$

onde  $k$  designa um número real.

- 3.1. Determine o valor de  $k$ , supondo que foram introduzidos 200 peixes no lago.

- 3.2. Admita agora que  $k = 29$ .

**Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

*Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.*

**Nota:** se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

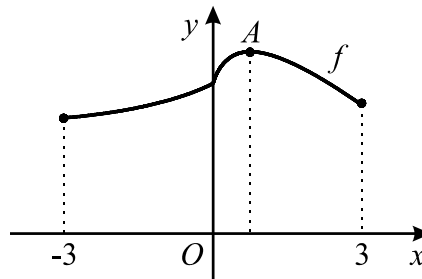
4. Seja  $f$  a função de domínio  $[-3, 3]$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + 2x}{x} & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 3 - x + \ln(1 + 4x) & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Na figura está representado o gráfico da função  $f$

Tal como a figura sugere:

- $A$  é o ponto do gráfico de  $f$  de ordenada máxima
- a abcissa do ponto  $A$  é positiva

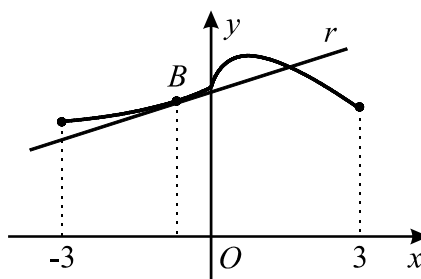


4.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

4.1.1. Determine a abcissa do ponto  $A$ .

4.1.2. Mostre que, tal como a figura sugere,  $f$  é contínua no ponto  $0$ .

4.2. Na figura está novamente representado o gráfico de  $f$ , no qual se assinalou um ponto  $B$ , no segundo quadrante.



A recta  $r$  é tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto  $B$ .

**Considere o seguinte problema:**

**Determinar a abcissa do ponto  $B$ , sabendo que a recta  $r$  tem declive  $0,32$**

Traduza este problema por meio de uma equação e, **recorrendo à calculadora**, resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abcissa do ponto  $B$ .

Pode realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora.

Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente **o valor pedido arredondado às centésimas**.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I ..... 50 pontos**

Cada resposta certa ..... 10 pontos  
Cada resposta errada..... 0 pontos  
Cada item não respondido ou anulado ..... 0 pontos

**Grupo II ..... 150 pontos**

1. .... 25 pontos

2. .... 20 pontos

3. .... 35 pontos

3.1. .... 15 pontos

3.2. .... 20 pontos

4. .... 70 pontos

4.1. .... 45 pontos

4.1.1. .... 20 pontos

4.1.2. .... 25 pontos

4.2. .... 25 pontos

**TOTAL ..... 200 pontos**

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 29.04.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

### COTAÇÕES

<b>GRUPO I</b> .....	<b>50 pontos</b>
Cada resposta certa .....	10 pontos
Cada resposta errada .....	0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .....	0 pontos
<b>GRUPO II</b> .....	<b>150 pontos</b>
1. ....	25 pontos
2. ....	20 pontos
3. ....	35 pontos
3.1. ....	15 pontos
3.2. ....	20 pontos
4. ....	70 pontos
4.1. ....	45 pontos
4.1.1. ....	20 pontos
4.1.2. ....	25 pontos
4.2. ....	25 pontos
<b>TOTAL</b> .....	<b>200 pontos</b>



## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

### Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

### Itens de resposta aberta

Situação	Classificação
<p>1. Engano na identificação do item a que o aluno está a responder.</p> <p>2. Omissão da identificação do item a que o aluno está a responder.</p>	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
<p>3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o aluno não indica, de forma inequívoca, aquela que pretende que seja classificada.</p>	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de respostas.
<p>4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.</p>	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
<p>5. Ilegibilidade da resposta.</p>	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
<p>6. Item com etapas.</p>	<p>A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual eventualmente se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.</p>
<p>7. Etapa com passos.</p>	<p>A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.</p>
<p>8. Item ou etapa cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho.</p>	O classificador deve enquadrar a resposta do aluno numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das cotações indicadas.
<p>9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [Exemplo: «usando métodos analíticos»].</p>	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.

<p><b>10.</b> Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.</p>	<p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p> <p>Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no Programa.</p>
<p><b>11.</b> Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.</p>	<p>A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.</p>
<p><b>12.</b> Transposição incorrecta de dados do enunciado.</p>	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, subtrair um ponto na cotação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p><b>13.</b> Erro ocasional num cálculo.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa em que ocorre o erro.</p>
<p><b>14.</b> Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.</p>	<p>A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.</p>
<p><b>15.</b> Erro na resolução de uma etapa.</p>	<p>A resolução dessa etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação.</p> <p>Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p><b>16.</b> Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O aluno não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.</p>	<p>Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.</p>
<p><b>17.</b> A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [Exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o aluno escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o aluno apresenta-o em metros].</p>	<p>Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.</p>

<p><b>18.</b> Na apresentação do resultado final não está expressa a unidade de medida [Exemplo: «15» em vez de «15 metros»]</p>	<p>A etapa relativa ao resultado final é classificada tal como se a unidade de medida estivesse indicada.</p>
<p><b>19.</b> O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.</p>	<p>Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.</p>
<p><b>20.</b> O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.</p>	<p>Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.</p>
<p><b>21.</b> Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.</p>	<p>Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos;</li> <li>– no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## Critérios específicos

### 1. ....25

Identificar a probabilidade pedida com $P(B A)$ .....	4
Escrever a igualdade $P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .....	4
Escrever a fórmula da probabilidade da união de dois acontecimentos .....	4
Substituir $P(A \cup B)$ por $7P(A \cap B)$ .....	3
Substituir $P(B)$ por $P(A)$ (ou $P(A)$ por $P(B)$ ) .....	3
Concluir que $8P(A \cap B)$ é igual a $2P(A)$ (ou a $2P(B)$ ) .....	3
Concluir que $P(B A) = \frac{2}{8}$ .....	3
Simplificar a fracção .....	1

**Nota:** é admissível uma resolução alternativa, recorrendo a um diagrama de Venn

### 2. ....20

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

- Referência à Regra de Laplace
- Explicação do número de casos possíveis
- Referência às duas hipóteses em alternativa, nos casos favoráveis
- Explicação do valor  $3!$
- Explicação do valor  $3$

A classificação a atribuir deve estar de acordo com a seguinte tabela:

	Nível 1	Nível 2	Nível 3
A composição contempla correctamente os cinco pontos	18	19	20
A composição contempla correctamente quatro pontos	14	15	16
A composição contempla correctamente três pontos	10	11	12
A composição contempla correctamente dois pontos	6	7	8
A composição contempla correctamente um ponto	2	3	4

**Nível 3** - Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de rigor de sentido.

**Nível 2** - Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.

**Nível 1** - Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

<b>3.1.</b> .....	<b>15</b>
Equacionar o problema $(f(0) = 200)$ .....	5
Resolver a equação .....	10
Obter a equação $\frac{3000}{1+k} = 200$ .....	5
Obter o valor de $k$ .....	5

<b>3.2.</b> .....	<b>20</b>
Equacionar o problema $\left(\frac{3000}{1+29e^{-0,11t}} = 500\right)$ .....	5
Resolver a equação .....	15
Obter a equação $e^{-0,11t} = \frac{5}{29}$ .....	6
Obter a equação $-0,11t = \ln\left(\frac{5}{29}\right)$ .....	6
Obter o valor de $t$ (arredondado às unidades) .....	3

<b>4.1.1.</b> .....	<b>20</b>
Determinar $f'(x)$ , para $x \in ]0, 3]$ .....	10
Derivada de $\ln(1+4x)$ .....	6
Restantes cálculos .....	4
Determinar o zero de $f'$ .....	10
Escrever a equação $f'(x) = 0$ .....	2
Resolver a equação .....	8

**Nota:** dado que o gráfico da função é dado no enunciado, não é necessário elaborar um quadro que relacione o sinal da derivada com a monotonia da função.

**4.1.2. ....25**

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ..... 12

Escrever a expressão da função como uma soma de fracções ..... 3

Aplicar a propriedade relativa ao limite de uma soma ..... 3

Referir que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  ..... 3

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$  ..... 3

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ..... 8

Calcular  $f(0)$  ..... 2

Conclusão ..... 3

**4.2. ....25**

Equacionar o problema  $(f'(x) = 0,32)$  ..... 6

Resolver a equação ..... 19

Derivar a função **(ver nota 1)**..... 6

Apresentar correctamente os gráficos obtidos na calculadora ..... 6

Gráfico de  $f'$  **(ver notas 2 e 3)** ..... 2

Recta de equação  $y = 0,32$  **(ver nota 3)** ..... 2

Respeito pelo domínio, de  $-3$  a  $0$  ..... 2

Apresentar o valor pedido **(ver nota 4)** ..... 7

**Notas:**

1. Caso o aluno não derive a função, mas apresente o gráfico **correcto** da derivada, considera-se que este foi obtido com recurso à ferramenta adequada da calculadora, pelo que os 6 pontos desta etapa devem ser atribuídos.
2. Caso o aluno tenha começado por derivar a função, considera-se que o gráfico está correcto se estiver de acordo com a expressão obtida, mesmo que esta esteja incorrecta.

3. Em alternativa à apresentação do gráfico de  $f'$  e da recta de equação  $y = 0,32$ , o aluno pode apresentar o gráfico da função definida pela expressão  $f'(x) - 0,32$ , tendo em vista a obtenção do zero desta função. Se tal acontecer, a classificação a atribuir à apresentação deste gráfico é de 4 pontos.

4. A apresentação do valor pedido deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1º caso: valor com duas casas decimais

- 0,69.....	7
- 0,70 ou - 0,68 .....	5
- 0,71 ou - 0,67 .....	3
- 0,72 ou - 0,66 .....	2
Outros valores.....	0

2º caso: valor com mais de duas casas decimais

Valor pertencente ao intervalo $[- 0,691 ; - 0,689]$ .....	5
Valor não pertencente ao intervalo anterior mas pertencente ao intervalo $[- 0,70 ; - 0,68]$ .....	4
Valor não pertencente ao intervalo anterior mas pertencente ao intervalo $[- 0,71 ; - 0,67]$ .....	2
Valor não pertencente ao intervalo anterior mas pertencente ao intervalo $[- 0,72 ; - 0,66]$ .....	1
Outros valores.....	0

3º caso: valor com menos de duas casas decimais

Valor igual a $- 0,7$ .....	1
Outros valores.....	0

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

---

### Grupo I

1.  $\log_a 4 + 2 \log_a 5 = \log_a (4 \times 5^2) = \log_a 100$

Resposta **D**

2. 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} =$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

O gráfico de  $h$  tem uma assíntota horizontal de equação  $y = 2$

Resposta **C**

3. Na opção B, tem-se:  $g(-2) = -2 - f(-2) = -2 - 3 = -5$   
 $g(2) = 2 - f(2) = 2 - 1 = 1$

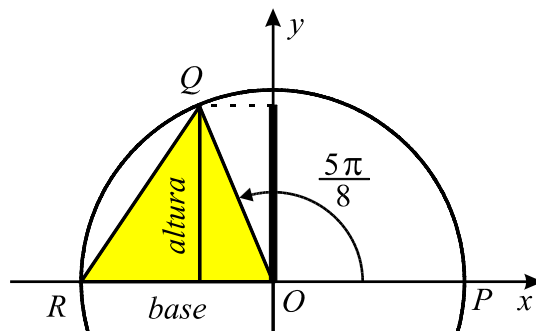
Como  $g(-2)$  e  $g(2)$  têm sinais contrários e como  $g$  é contínua no intervalo  $[-2, 2]$ , o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero de  $g$  no intervalo  $] -2, 2[$

Em cada uma das restantes opções,  $g(-2)$  e  $g(2)$  têm o mesmo sinal.

Resposta **B**

4.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \\ &= \frac{1 \times \text{sen} \left( \frac{5\pi}{8} \right)}{2} \approx \\ &\approx 0,46 \end{aligned}$$



Resposta **C**

5. De acordo com a Lei Binomial,  $p = {}^7C_2 \left( \frac{1}{6} \right)^2 \left( \frac{5}{6} \right)^5 \approx 0,23$

Resposta **C**



## Grupo II

1. Tem-se  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Substituindo, nesta igualdade,  $P(A \cup B)$  por  $7P(A \cap B)$ , vem:

$$7P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ pelo que}$$

$$8P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Como  $P(B) = P(A)$ , vem  $8P(A \cap B) = 2P(A)$

$$\text{Vem, então, } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

2. De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.

O número de casos possíveis é  $6^3$  pois, como em cada lançamento existem seis hipóteses, no conjunto dos três lançamentos existem  $6 \times 6 \times 6$  possibilidades.

Relativamente aos casos favoráveis a «o produto dos números saídos ser igual a 6», existem duas hipóteses em alternativa, que se excluem mutuamente: ou os números saídos são 1, 2 e 3, ou são 1, 1 e 6. No primeiro caso, temos  $3!$  possibilidades, que é o número de permutações de três elementos. No segundo caso, temos 3 possibilidades (a face 6 pode sair, ou no primeiro lançamento, ou no segundo, ou no terceiro). Portanto, o número de casos favoráveis é  $3! + 3$ .

3.1. Tem-se  $f(0) = 200 \Leftrightarrow \frac{3000}{1+k} = 200 \Leftrightarrow k = 14$

3.2. Tem-se  $f(t) = 500 \Leftrightarrow \frac{3000}{1+29e^{-0,11t}} = 500 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3000 = 500(1 + 29e^{-0,11t}) \Leftrightarrow \frac{3000}{500} = 1 + 29e^{-0,11t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = 1 + 29e^{-0,11t} \Leftrightarrow 5 = 29e^{-0,11t} \Leftrightarrow \frac{5}{29} = e^{-0,11t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,11t = \ln\left(\frac{5}{29}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{29}\right)}{-0,11} \quad \text{Portanto, } t \approx 16$$

**4.1.1.** Para  $x \in ]0, 3]$ , tem-se  $f'(x) = -1 + \frac{4}{1+4x}$

A abscissa do ponto  $A$  é a solução da equação  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{1+4x} = 1 \Leftrightarrow 1+4x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

**4.1.2.** Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 + 2x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^x - 1}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^x - 1}{x} + 2 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) + 2 = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [3 - x + \ln(1 + 4x)] = 3 - 0 + \ln(1) = 3$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ , tem-se  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

Uma vez que  $f(0) = 3$ , tem-se  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Portanto,  $f$  é contínua no ponto 0

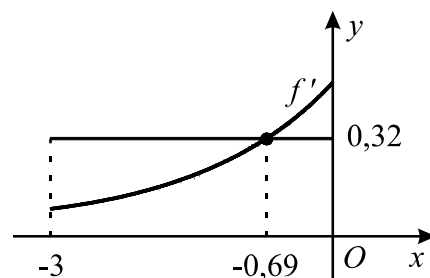
**4.2.** A abscissa do ponto  $B$  é a solução da equação  $f'(x) = 0,32$  para  $x \in [-3, 0[$

Tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - 1 + 2x)' \cdot x - (x)' \cdot (e^x - 1 + 2x)}{x^2} = \\ &= \frac{(e^x + 2) \cdot x - (e^x - 1 + 2x)}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2} \end{aligned}$$

Na figura está representado o gráfico de  $f'$ , para  $x$  entre  $-3$  e  $0$ , a recta de equação  $y = 0,32$  e o ponto de intersecção das duas linhas.

A solução da equação  $f'(x) = 0,32$  é a abscissa deste ponto.



Portanto, a abscissa do ponto  $B$  é  $-0,69$

**Nota:** para obter o gráfico de  $f'$ , não era necessário determinar a expressão que a define. Teria bastado utilizar a ferramenta apropriada da calculadora (por exemplo: *nDerive* numa calculadora Texas,  $\frac{d}{dx}$  numa calculadora Casio, etc.).