

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 24.01.2008

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas
aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

Grupo II

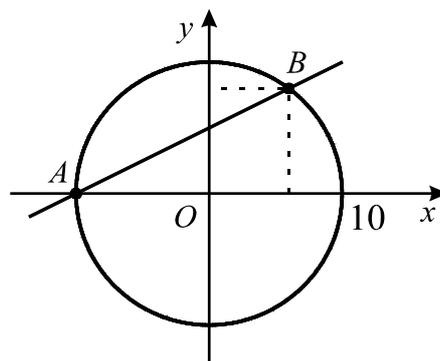
Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy , uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 10

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.



- 1.1. Admitindo que o declive da recta AB é igual a $\frac{1}{2}$, resolva as três alíneas seguintes:

1.1.1. Mostre que uma equação da recta AB é $x - 2y + 10 = 0$

1.1.2. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(6, 8)$

1.1.3. Seja C o ponto de coordenadas $(2, 16)$
Verifique que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B

- 1.2. Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.

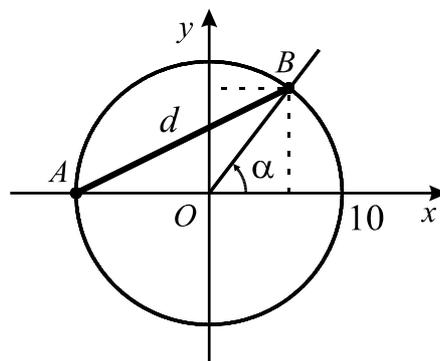
Para cada posição do ponto B , seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}B$

Seja d o comprimento do segmento $[AB]$

1.2.1. Mostre que $d^2 = 200 + 200 \cos \alpha$

1.2.2. Para uma certa posição do ponto B , tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$

Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d



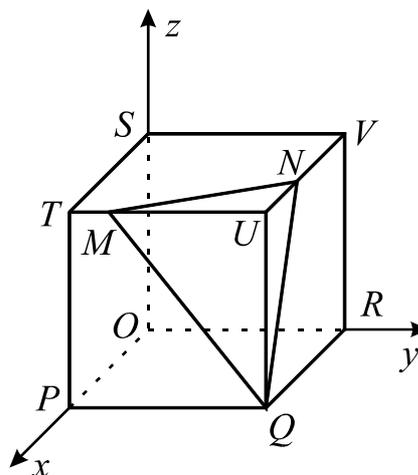
2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUV]$ de aresta 5

O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial.

Os vértices P , R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox , Oy e Oz , respectivamente.

O triângulo escaleno $[MNQ]$ é a secção produzida no cubo pelo plano α de equação

$$10x + 5y + 4z = 75$$



- 2.1. Escreva uma condição que defina a recta que passa por U e é perpendicular ao plano α

- 2.2. Seja β a amplitude, em **graus**, do ângulo MQN . Determine β
Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Sugestão: comece por determinar as coordenadas dos pontos M e N

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 50 pontos

Cada resposta certa 10 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada item não respondido ou anulado 0 pontos

Grupo II 150 pontos

1. 105 pontos

1.1. 55 pontos

1.1.1. 15 pontos

1.1.2. 20 pontos

1.1.3. 20 pontos

1.2. 50 pontos

1.2.1. 25 pontos

1.2.2. 25 pontos

2. 45 pontos

2.1. 20 pontos

2.2. 25 pontos

TOTAL 200 pontos

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 24.01.2008

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

COTAÇÕES

GRUPO I	50 pontos
Cada resposta certa	10 pontos
Cada resposta errada	0 pontos
Cada item não respondido ou anulado	0 pontos
GRUPO II	150 pontos
1.	105 pontos
1.1.	55 pontos
1.1.1.	15 pontos
1.1.2.	20 pontos
1.1.3.	20 pontos
1.2.	50 pontos
1.2.1.	25 pontos
1.2.2.	25 pontos
2.	45 pontos
2.1.	20 pontos
2.2.	25 pontos
TOTAL	200 pontos

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Situação	Classificação
<p>1. Engano na identificação do item a que o aluno está a responder.</p> <p>2. Omissão da identificação do item a que o aluno está a responder.</p>	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
<p>3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o aluno não indica, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada.</p>	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de resposta.
<p>4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.</p>	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
<p>5. Ilegibilidade da resposta.</p>	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
<p>6. Item com etapas.</p>	<p>A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual eventualmente se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.</p>
<p>7. Etapa com passos.</p>	<p>A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.</p>
<p>8. Item ou etapa cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho.</p>	O classificador deve enquadrar a resposta do aluno numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das cotações indicadas.
<p>9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [Exemplo: «usando métodos analíticos»].</p>	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.

<p>10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.</p>	<p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p> <p>Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no Programa.</p>
<p>11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.</p>	<p>A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.</p>
<p>12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.</p>	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, subtrair um ponto na cotação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p>13. Erro ocasional num cálculo.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa em que ocorre o erro.</p>
<p>14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.</p>	<p>A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.</p>
<p>15. Erro na resolução de uma etapa.</p>	<p>A resolução desta etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação.</p> <p>Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p>16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O aluno não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.</p>	<p>Subtrair um ponto à classificação total do item.</p>
<p>17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [Exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o aluno escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o aluno apresenta-o em metros].</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>

<p>18. Na apresentação do resultado final não está expressa a unidade de medida [Exemplo: «15» em vez de «15 metros»]</p>	<p>A etapa relativa ao resultado final é classificada tal como se a unidade de medida estivesse indicada.</p>
<p>19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>
<p>20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>
<p>21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.</p>	<p>Subtrair um ponto à classificação total do item, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> – se as correcções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Critérios específicos

1.1.1 15

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo:

Identificar as coordenadas do ponto A	4
Escrever uma equação da família de rectas de declive $1/2$	4
Determinar a equação reduzida da recta AB	4
Verificar que a equação obtida é equivalente à equação $x - 2y + 10 = 0$	3

2.º Processo:

Identificar as coordenadas do ponto A	4
Escrever a equação $y - 0 = \frac{1}{2}(x + 10)$	6
Verificar que esta equação é equivalente à equação $x - 2y + 10 = 0$	5

3.º Processo:

Identificar as coordenadas do ponto A	4
Verificar que as coordenadas do ponto A satisfazem a equação $x - 2y + 10 = 0$	5
Verificar que o declive da recta definida por $x - 2y + 10 = 0$ é $1/2$	6

1.1.2 20

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Escrever uma equação da circunferência	8
Verificar que $(6, 8)$ satisfaz a equação da circunferência.....	6
Verificar que $(6, 8)$ satisfaz a equação da recta	6

2.º Processo:

Escrever uma equação da circunferência	8
Resolver o sistema formado pela equação da recta e pela equação da circunferência	12
Resolver a equação da recta, em ordem a uma das incógnitas	2
Substituir, na equação da circunferência, essa incógnita pela expressão obtida	2
Desenvolver o quadrado do binómio	3
Resolver a equação do segundo grau e identificar uma das coordenadas do ponto B	3
Determinar a outra coordenada do ponto B	2

1.1.3. 20

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo:

Determinar as coordenadas do vector \overrightarrow{BA} (ou do vector \overrightarrow{AB}) 4

Determinar as coordenadas do vector \overrightarrow{BC} (ou do vector \overrightarrow{CB}) 4

Determinar o produto escalar dos dois vectores 10

Conclusão 2

2.º Processo:

Determinar as coordenadas do vector \overrightarrow{BC} (ou do vector \overrightarrow{CB}) 4

Determinar o declive da recta BC 6

Conclusão (por exemplo: o produto dos declives das rectas AB e BC é -1)..... 10

3.º Processo:

Determinar as coordenadas do vector \overrightarrow{BA} (ou do vector \overrightarrow{AB}) 4

Determinar as coordenadas do vector \overrightarrow{BC} (ou do vector \overrightarrow{CB}) 4

Determinar as coordenadas de um vector \vec{u} perpendicular a \overrightarrow{BA} 6

Verificar que os vectores \vec{u} e \overrightarrow{BC} são colineares 6

4.º Processo:

Determinar a distância do ponto A ao ponto B 5

Determinar a distância do ponto A ao ponto C 5

Determinar a distância do ponto B ao ponto C 5

Conclusão (utilizando o recíproco do Teorema de Pitágoras) 5

1.2.1. 25

Abcissa de $B = 10 \cos \alpha$ 4

Ordenada de $B = 10 \sin \alpha$ 4

$d^2 = (10 + 10 \cos \alpha)^2 + (10 \sin \alpha)^2$ 7

Desenvolver o quadrado do binómio4

$d^2 = 100 + 200 \cos \alpha + 100 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$ 4

Conclusão2

1.2.2. 25

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Escrever a igualdade que relaciona a tangente e o co-seno de um mesmo ângulo4

Substituir, na igualdade anterior, $\operatorname{tg} \alpha$ por $\sqrt{15}$ 2

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{16}$ 9

$\cos \alpha = \frac{1}{4}$ (**ver nota**).....6

Obter o valor de d 4

2.º Processo:

Escrever a igualdade que relaciona a tangente com o seno e o co-seno de um mesmo ângulo2

$\sin \alpha = \sqrt{15} \cos \alpha$ 2

$(\sqrt{15} \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ 2

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{16}$ 9

$\cos \alpha = \frac{1}{4}$ (**ver nota**).....6

Obter o valor de d 4

Nota:

Se o aluno não referir que $\cos \alpha > 0$, a classificação máxima a atribuir a esta etapa deve ser de 2 pontos.

2.1. 20

- Identificar as coordenadas do ponto U 4
- Escrever as coordenadas de um vector normal ao plano α 4
- Identificar esse vector como um vector director da recta (**ver nota 1**)6
- Escrever uma condição da recta (**ver nota 2**) 6

Notas:

1. O aluno não necessita de explicitar esta etapa, desde que, na escrita da condição que define a recta pedida, utilize correctamente as coordenadas de um vector normal ao plano.
2. Se, na escrita da condição, o aluno utilizar coordenadas simétricas das do ponto U , ou se as coordenadas do ponto U estiverem trocadas com as do vector director, a classificação máxima a atribuir a esta etapa é de 2 pontos.

2.2. 25

- Identificar as coordenadas do ponto Q 2
- Determinar as coordenadas dos pontos M e N (4+4) 8
- Determinar as coordenadas dos vectores \overrightarrow{QM} e \overrightarrow{QN} (**ver nota 1**) . (2+2) 4
- Determinar as normas dos vectores \overrightarrow{QM} e \overrightarrow{QN} (2+2) 4
- Determinar o produto escalar $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ 2
- Determinar $\cos \beta$ 2
- Determinar β (**ver nota 2**)3

Notas:

1. Se os vectores escolhidos pelo aluno formarem um ângulo suplementar de β , a classificação máxima a atribuir a esta etapa deve ser de 2 pontos. Ressalva-se o caso em que, no final, o aluno apresente como resposta o suplementar do ângulo dos vectores que escolheu.
2. Se o resultado não estiver arredondado às unidades, ou se estiver mal arredondado, a classificação máxima a atribuir a esta etapa deve ser de 2 pontos.
Se o resultado apresentado pelo aluno for a amplitude do ângulo em radianos, a classificação máxima a atribuir a esta etapa deve ser de 1 ponto.

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

Grupo I

1. Tem-se $\beta + 2\alpha = \pi$, ou seja, $\beta = \pi - 2\alpha$
Vem, então: $\sin \beta = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin(2\alpha)$

Resposta A

2. Sendo θ um valor pertencente ao intervalo $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, tem-se
 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ e $\operatorname{tg} \theta > 0$
Por isso, $\cos \theta + \sin \theta < 0$, $\sin \theta \times \cos \theta > 0$, $\operatorname{tg} \theta - \cos \theta > 0$
e $\operatorname{tg} \theta - \sin \theta > 0$

Resposta A

3. $1 - 3 \operatorname{tg}(2x) = 4 \Leftrightarrow -3 \operatorname{tg}(2x) = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = -1$. Tem-se agora:

$$\bullet \operatorname{tg}\left[2 \times \left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right] = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg}\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg}\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg}\left(2 \times \frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$$

Resposta D

4. Tem-se:

- o vector de coordenadas $(1, -1, 1)$ é perpendicular ao plano α
- o vector de coordenadas $(3, -3, 3)$ é perpendicular ao plano β

Estes dois vectores são colineares, pelo que os dois planos são paralelos.

Como as duas equações não são equivalentes, os planos não são coincidentes, sendo, portanto, estritamente paralelos. Por isso, a intersecção dos planos α e β é o conjunto vazio.

Resposta D

5. Como cada litro de bebida X dá um lucro de 3 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 4 euros, o lucro é dado por $3x + 4y$, lucro esse que se pretende maximizar. As respostas A e C ficam portanto excluídas.

Por outro lado:

- cada litro de bebida X tem meio litro de sumo de laranja e meio litro de sumo de manga; assim, para confeccionar x litros de bebida X , gastam-se $\frac{x}{2}$ litros de sumo de laranja e $\frac{x}{2}$ litros de sumo de manga;

- cada litro de bebida Y tem $\frac{3}{4}$ de litro de sumo de laranja e $\frac{1}{4}$ de litro de sumo de manga; assim, para confeccionar y litros de bebida Y , gastam-se $\frac{3y}{4}$ litros de sumo de laranja e $\frac{y}{4}$ litros de sumo de manga.

Portanto,

- o número total de litros de sumo de laranja consumidos na confecção dos dois tipos de bebidas é $\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}$

- o número total de litros de sumo de manga consumidos na confecção dos dois tipos de bebidas é $\frac{x}{2} + \frac{y}{4}$

Como a frutaria dispõe diariamente de 18 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga, tem-se $\frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \leq 18$ e $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leq 10$

Resposta B

Grupo II

- 1.1.1. Como o declive da recta AB é igual a $\frac{1}{2}$, a equação reduzida desta recta é da forma $y = \frac{1}{2}x + b$

Como a recta passa no ponto $A(-10, 0)$, tem-se $0 = \frac{1}{2} \times (-10) + b$

$$0 = \frac{1}{2} \times (-10) + b \Leftrightarrow 0 = -5 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Vem, então:

$$y = \frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow 2y = x + 10 \Leftrightarrow x - 2y + 10 = 0$$

1.1.2. O ponto B é o único ponto do primeiro quadrante que pertence simultaneamente à recta AB e à circunferência centrada na origem do referencial e raio 10, cuja equação é $x^2 + y^2 = 100$.

Portanto, para mostrar que o ponto B tem coordenadas $(6, 8)$, basta verificar que este par ordenado satisfaz, quer a equação da recta, quer a equação da circunferência.

Tem-se:

$$\bullet 6 - 2 \times 8 + 10 = 0 \Leftrightarrow 6 - 16 + 10 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ o que é verdade;}$$

$$\bullet 6^2 + 8^2 = 100 \Leftrightarrow 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow 100 = 100, \text{ o que também é verdade.}$$

Portanto, o ponto B tem coordenadas $(6, 8)$.

1.1.3. O triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B se, e só se, os vectores \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são perpendiculares.

Tem-se:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-10, 0) - (6, 8) = (-16, -8)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (2, 16) - (6, 8) = (-4, 8)$$

Estes dois vectores são perpendiculares se, e só se, o produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ é igual a zero.

$$\text{Vejamos: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-16, -8) \cdot (-4, 8) = 64 - 64 = 0$$

O triângulo $[ABC]$ é, de facto, rectângulo em B

1.2.1. Tem-se que as coordenadas do ponto B são $(10 \cos \alpha, 10 \sin \alpha)$

Como as coordenadas do ponto A são $(-10, 0)$, tem-se:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (10 \cos \alpha, 10 \sin \alpha) - (-10, 0) = (10 + 10 \cos \alpha, 10 \sin \alpha)$$

$$\text{Portanto, } d^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = (10 + 10 \cos \alpha)^2 + (10 \sin \alpha)^2 =$$

$$= 100 + 200 \cos \alpha + 100 \cos^2 \alpha + 100 \sin^2 \alpha =$$

$$= 100 + 200 \cos \alpha + 100 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) =$$

$$= 100 + 200 \cos \alpha + 100 = 200 + 200 \cos \alpha$$

1.2.2. Tem-se $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ Como $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$ vem:

$$1 + 15 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 16 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{16}$$

Como α é um ângulo do primeiro quadrante, tem-se $\cos \alpha = \frac{1}{4}$

$$\text{Portanto, } d^2 = 200 + 200 \cos \alpha = 200 + 200 \times \frac{1}{4} = 200 + 50 = 250$$

$$\text{Vem, então, } d = \sqrt{250}$$

- 2.1.** Tem-se que o vector de coordenadas $(10, 5, 4)$ é perpendicular ao plano α , pelo que tem a direcção da recta em causa.

Como esta recta passa pelo ponto $U(5, 5, 5)$, uma condição que a define pode ser

$$\frac{x-5}{10} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-5}{4}$$

A recta também pode ser definida por $(x, y, z) = (5, 5, 5) + k(10, 5, 4)$, $k \in \mathbb{R}$

- 2.2.** O ponto M tem abcissa igual a 5, cota igual a 5 e pertence ao plano de equação $10x + 5y + 4z = 75$, pelo que a sua ordenada é a solução da equação

$$10 \times 5 + 5y + 4 \times 5 = 75$$

$$\text{Tem-se: } 10 \times 5 + 5y + 4 \times 5 = 75 \Leftrightarrow 50 + 5y + 20 = 75 \Leftrightarrow y = 1$$

Portanto, o ponto M tem coordenadas $(5, 1, 5)$

O ponto N tem ordenada igual a 5, cota igual a 5 e pertence ao plano de equação

$$10x + 5y + 4z = 75, \text{ pelo que a sua abcissa é a solução da equação}$$

$$10x + 5 \times 5 + 4 \times 5 = 75$$

$$\text{Tem-se: } 10x + 5 \times 5 + 4 \times 5 = 75 \Leftrightarrow 10x + 25 + 20 = 75 \Leftrightarrow x = 3$$

Portanto, o ponto N tem coordenadas $(3, 5, 5)$

O ângulo MQN é o ângulo dos vectores \overrightarrow{QM} e \overrightarrow{QN}

Como o ponto Q tem coordenadas $(5, 5, 0)$, vem:

$$\overrightarrow{QM} = M - Q = (5, 1, 5) - (5, 5, 0) = (0, -4, 5)$$

$$\overrightarrow{QN} = N - Q = (3, 5, 5) - (5, 5, 0) = (-2, 0, 5)$$

O produto escalar $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ é igual a $0 \times (-2) + (-4) \times 0 + 5 \times 5 = 25$

$$\text{Vem, então: } \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = \|\overrightarrow{QM}\| \times \|\overrightarrow{QN}\| \times \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 5^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 5^2} \times \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 = \sqrt{41} \times \sqrt{29} \times \cos \beta \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{25}{\sqrt{1189}}$$

Portanto, como β é um ângulo interno de um triângulo, tem-se $0^\circ < \beta < 180^\circ$, pelo

$$\text{que } \beta = \cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{1189}}\right) \approx 44^\circ$$