

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 28.05.2008

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Nome do aluno \_\_\_\_\_

N.º \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

**Este teste contém um item cuja resolução é parcialmente feita no enunciado. Por este motivo, o enunciado deve ser entregue pelo aluno em conjunto com a sua folha de respostas.**

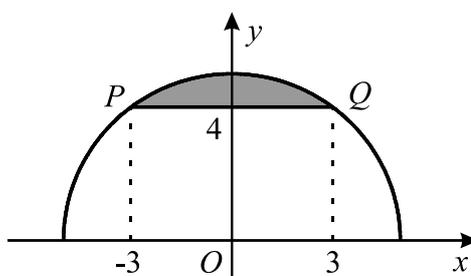
## Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Em  $\mathbb{R}$ , qual das condições seguintes é equivalente à inequação  $x^2 < 4$  ?

- (A)  $x < 2$                       (B)  $x < 4$                       (C)  $|x| < 2$                       (D)  $|x| < 4$

2. Na figura está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , uma semicircunferência de centro na origem e que passa nos pontos  $P$  e  $Q$ .  
O ponto  $P$  tem coordenadas  $(-3, 4)$  e o ponto  $Q$  tem coordenadas  $(3, 4)$ .  
Na figura está também representado o segmento de recta  $[PQ]$ .



Qual das condições seguintes define o domínio plano sombreado?

- (A)  $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge -3 \leq x \leq 3$   
(B)  $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge y \geq 4$   
(C)  $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -3 \leq x \leq 3$   
(D)  $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \geq 4$

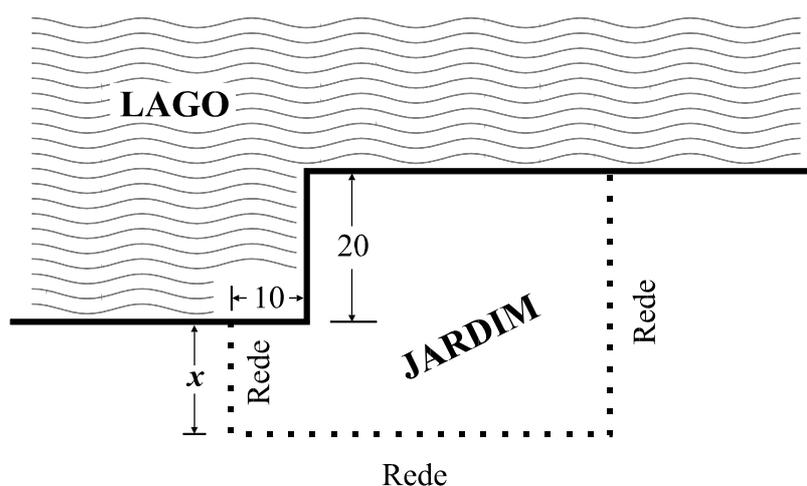


## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra. Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede. Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam sempre perpendiculares.



As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros.

Tal como a figura mostra,  $x$  é a medida, em metros, de um dos lados do jardim. Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.

- 1.1. Mostre que a área, em  $m^2$ , do jardim, é dada, em função de  $x$ , por

$$a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$$

- 1.2. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de  $x$  para o qual é máxima a área do jardim e determine essa área máxima.

2. Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$ . Sabe-se que o gráfico de  $f$  intersecta o eixo  $Ox$  em apenas dois pontos. Um deles tem abcissa  $-2$ .

- 2.1. Decomponha o polinómio  $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$  num produto de três polinómios, sendo dois do primeiro grau e um do segundo grau.

- 2.2. O contradomínio de  $f$  é um intervalo da forma  $[a, +\infty[$ . **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, determine o valor de  $a$ , arredondado às décimas.

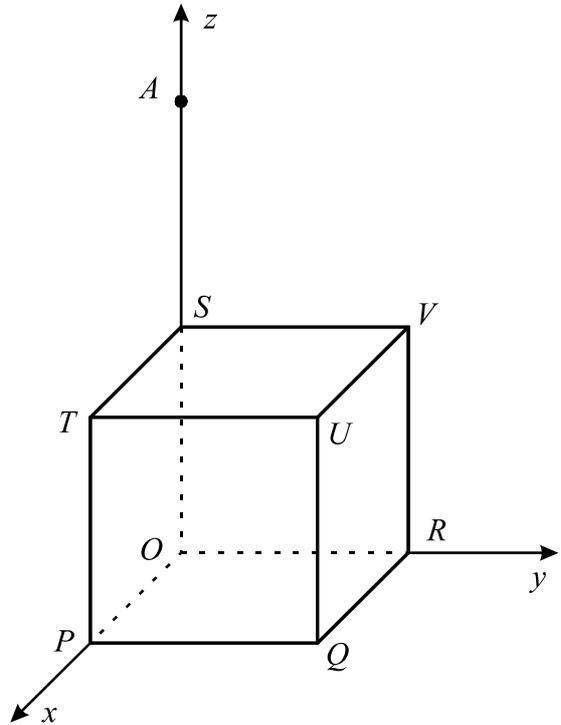
Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico de  $f$  visualizado na calculadora, depois de ter escolhido uma janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema proposto. Assinale esse ponto no seu gráfico.

3. Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cubo  $[OPQRSTUV]$

A aresta  $[OP]$  está contida no semieixo positivo  $Ox$ , a aresta  $[OR]$  está contida no semieixo positivo  $Oy$  e a aresta  $[OS]$  está contida no semieixo positivo  $Oz$ .

O ponto  $U$  tem coordenadas  $(2, 2, 2)$

No eixo  $Oz$  está representado um ponto  $A$ , cuja cota é 4



- 3.1. Defina, por meio de uma condição, a aresta  $[UQ]$
- 3.2. Averigúe se o ponto  $T$  pertence ao plano mediador do segmento  $[AV]$
- 3.3. Na figura acima **desenhe**, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano  $PQA$  e, na sua folha de prova, **determine** o seu perímetro.

**Nota importante:**

O seu desenho é feito no enunciado.

Por este motivo, escreva o seu nome no enunciado e entregue o enunciado em conjunto com a sua folha de respostas.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I ..... 50 pontos**

Cada resposta certa ..... 10 pontos  
Cada resposta errada..... 0 pontos  
Cada item não respondido ou anulado ..... 0 pontos

**Grupo II ..... 150 pontos**

**1. .... 45 pontos**

1.1. .... 25 pontos

1.2. .... 20 pontos

**2. .... 40 pontos**

2.1. .... 20 pontos

2.2. .... 20 pontos

**3. .... 65 pontos**

3.1. .... 20 pontos

3.2. .... 20 pontos

3.3. .... 25 pontos

**TOTAL ..... 200 pontos**

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 28.05.2008

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

### COTAÇÕES

<b>GRUPO I</b> .....	<b>50 pontos</b>
Cada resposta certa .....	10 pontos
Cada resposta errada .....	0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .....	0 pontos
<b>GRUPO II</b> .....	<b>150 pontos</b>
1. ....	45 pontos
1.1. ....	25 pontos
1.2. ....	20 pontos
2. ....	40 pontos
2.1. ....	20 pontos
2.2. ....	20 pontos
3. ....	65 pontos
3.1. ....	20 pontos
3.2. ....	20 pontos
3.3. ....	25 pontos
<b>TOTAL</b> .....	<b>200 pontos</b>

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

### Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

### Itens de resposta aberta

Situação	Classificação
<p>1. Engano na identificação do item a que o aluno está a responder.</p> <p>2. Omissão da identificação do item a que o aluno está a responder.</p>	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
<p>3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o aluno não indica, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada.</p>	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de resposta.
<p>4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.</p>	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
<p>5. Ilegibilidade da resposta.</p>	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
<p>6. Item com etapas.</p>	<p>A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual eventualmente se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.</p>
<p>7. Etapa com passos.</p>	<p>A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.</p>
<p>8. Item ou etapa cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho.</p>	O classificador deve enquadrar a resposta do aluno numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das cotações indicadas.
<p>9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [Exemplo: «usando métodos analíticos»].</p>	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.

<p><b>10.</b> Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.</p>	<p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p> <p>Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no Programa.</p>
<p><b>11.</b> Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.</p>	<p>A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.</p>
<p><b>12.</b> Transposição incorrecta de dados do enunciado.</p>	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, subtrair um ponto na cotação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p><b>13.</b> Erro ocasional num cálculo.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa em que ocorre o erro.</p>
<p><b>14.</b> Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.</p>	<p>A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.</p>
<p><b>15.</b> Erro na resolução de uma etapa.</p>	<p>A resolução desta etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação.</p> <p>Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p><b>16.</b> Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O aluno não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.</p>	<p>Subtrair um ponto à classificação total do item.</p>
<p><b>17.</b> A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [Exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o aluno escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o aluno apresenta-o em metros].</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>

<p><b>18.</b> Na apresentação do resultado final não está expressa a unidade de medida [Exemplo: «15» em vez de «15 metros»]</p>	<p>A etapa relativa ao resultado final é classificada tal como se a unidade de medida estivesse indicada.</p>
<p><b>19.</b> O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>
<p><b>20.</b> O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>
<p><b>21.</b> Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.</p>	<p>Subtrair um ponto à classificação total do item, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos;</li> <li>- no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## Critérios específicos

### 1.1. .... 25

Expressar, em função de  $x$ , o comprimento do lado do jardim que é oposto ao lado que tem comprimento  $x$  ..... 4

Expressar, em função de  $x$ , o comprimento do terceiro lado com rede ..... 8

Expressar, em função de  $x$ , a área do jardim ..... 8

Simplificar a expressão obtida na etapa anterior, obtendo  $a(x)$  ..... 5

### 1.2. .... 20

Determinar a abcissa do vértice ..... 9

Determinar a ordenada do vértice ..... 9

Resposta ..... 2

### 2.1. .... 20

Concluir que  $-2$  é um zero do polinómio ..... 4

Dividir o polinómio por  $x + 2$  ..... 8

Pôr a variável  $x$  em evidência.....4

Resposta .....4

### 2.2. .... 20

Apresentar o gráfico nas condições pedidas no enunciado ..... 7

Assinalar o ponto de ordenada mínima ..... 6

Escrever o valor de  $a$  (**ver nota**).....7

#### Nota

A escrita do valor de  $a$  deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta  $-13,9$  ..... 7

Resposta  $-14,0$  ou  $-13,8$  ..... 4

Outras respostas .....0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo [ - 13,93 ; - 13,85] .....	5
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo [ - 13,98 ; - 13,80] .....	3
Outras respostas .....	0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Resposta - 14 .....	2
Outras respostas .....	0

**3.1. .... 20**

Escrever uma condição cartesiana que defina a recta $UQ$ .....	10
Escrever uma condição que defina o conjunto de pontos cuja cota está compreendida entre 0 e 2, inclusive .....	6
Escrever a conjunção das duas condições .....	4
<b>ou</b>	
Determinar as coordenadas de um vector director da recta $UQ$ .....	5
Escrever uma equação vectorial da recta $UQ$ .....	5
Indicar o intervalo de variação do parâmetro .....	10

**3.2. .... 20**

Determinar a distância de $T$ a $A$ .....	8
Determinar a distância de $T$ a $V$ .....	8
Conclusão .....	4
<b>ou</b>	
Escrever uma equação do plano mediador do segmento $[AV]$ .....	12
Verificar que as coordenadas de $T$ satisfazem a equação do plano.....	6
Conclusão .....	2

**3.3. .... 25**

Desenhar a secção (**ver nota**) ..... 15

Determinar o comprimento do lado contido no segmento  $[AP]$  ..... 7

Resposta ..... 3

**Nota**

O desenho deve ser um quadrilátero em que três dos seus vértices são os pontos  $P$ ,  $Q$  e o ponto médio de  $[ST]$  (ponto de intersecção de  $AP$  com  $ST$ ). O quarto vértice deve pertencer ao segmento  $[UV]$ .

Se o desenho cumprir as condições enunciadas, a classificação a atribuir a esta etapa deve estar de acordo com o seguinte critério:

O quarto vértice está na posição correcta (ponto médio de  $[UV]$ ) ..... 15

O quarto vértice está desviado da posição correcta, sendo o desvio inferior ou igual a 2 mm ..... 12

O quarto vértice está desviado da posição correcta, sendo o desvio superior a 2 mm, mas inferior ou igual a 4 mm ..... 5

Outras situações .....0

Se o desenho não cumprir as condições enunciadas, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser de zero pontos.

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

---

### Grupo I

1. Tem-se:  $x^2 < 4 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x < 2 \Leftrightarrow |x| < 2$

Resposta C

2. A distância do ponto  $Q(3, 4)$  à origem é  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .  
Portanto, a semicircunferência tem raio 5.  
O domínio plano sombreado é, portanto, a intersecção do círculo definido pela condição  $x^2 + y^2 \leq 25$  com o semiplano definido pela condição  $y \geq 4$

Resposta B

3. Os pontos de coordenadas  $(2, 0)$  e  $(0, 6)$  pertencem à recta  $r$ .  
Portanto, um vector director da recta  $r$  é o vector  $(2, 0) - (0, 6) = (2, -6)$ .  
Assim, o declive da recta  $r$  é  $-\frac{6}{2} = -3$

Resposta A

4. A esfera  $E$  tem centro na origem do referencial e raio igual a 2.  
A recta  $r$  contém o ponto  $(0, 0, 2)$  e é paralela ao eixo  $Oy$ .  
Portanto, a intersecção da esfera  $E$  com a recta  $r$  é o ponto  $(0, 0, 2)$

Resposta C

5. A média é igual a  $\frac{3 \times 0 + 7 \times 1 + 10 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5}{3 + 7 + 10 + 3 + 1 + 1} =$   
 $= \frac{0 + 7 + 20 + 9 + 4 + 5}{25} = \frac{45}{25} = 1,8$

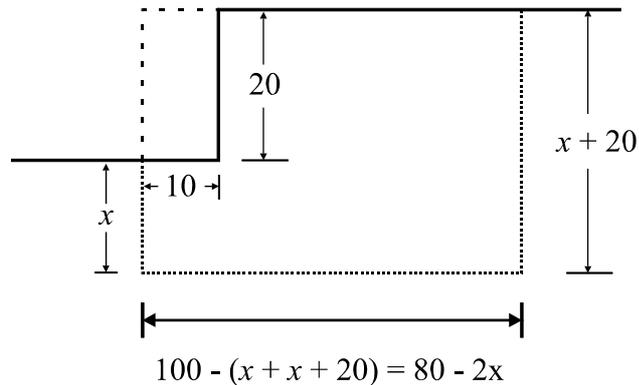
Resposta A

## Grupo II

**1.1.** Relativamente aos lados do jardim que não confinam com o lago, tem-se:

- um tem  $x$  metros de comprimento;
- o lado oposto tem  $x + 20$  metros de comprimento;
- o terceiro lado tem  $100 - (x + x + 20)$  metros de comprimento, pois a rede tem 100 metros.

Tem-se, assim, o seguinte esquema:



Portanto, a área, em  $m^2$ , do jardim, é dada, em função de  $x$ , por

$$\begin{aligned} a(x) &= (80 - 2x)(x + 20) - 10 \times 20 = \\ &= 80x + 1600 - 2x^2 - 40x - 200 \\ &= -2x^2 + 40x + 1400 \end{aligned}$$

**1.2.**  $y = -2x^2 + 40x + 1400$  define uma parábola.

Trata-se de encontrar as coordenadas do seu vértice.

$$\text{A abcissa é } -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-4} = 10$$

A ordenada é a imagem da abcissa, ou seja, é

$$a(10) = -2 \times 100 + 40 \times 10 + 1400 = -200 + 400 + 1400 = 1600$$

A área do jardim é máxima para  $x = 10$ , sendo  $1600 m^2$  a área máxima.

- 2.1.** Como um dos pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$  tem abcissa  $-2$ , tal significa que  $-2$  é um zero de  $f$ .

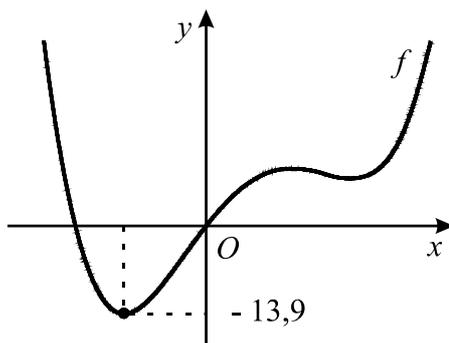
Portanto, o polinómio  $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$  é divisível por  $x + 2$

Façamos a divisão, utilizando a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -3 & -3 & 14 & 0 \\ & & -2 & 10 & -14 & 0 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x &= (x + 2)(x^3 - 5x^2 + 7x) = \\ &= (x + 2) \cdot x \cdot (x^2 - 5x + 7) \end{aligned}$$

- 2.2.** Na figura seguinte está representada parte do gráfico de  $f$ .



Assinalou-se no gráfico o ponto de ordenada mínima.

Tem-se, assim,  $a \approx -13,9$

- 3.1.** A aresta  $[UQ]$  está contida na recta de intersecção dos planos  $PUQ$  e  $RUQ$ , definidos, respectivamente, pelas equações  $x = 2$  e  $y = 2$ .

A aresta  $[UQ]$  é o conjunto dos pontos desta recta que têm cota compreendida entre 0 e

2. Assim, uma condição que define a aresta  $[UQ]$  é

$$x = 2 \wedge y = 2 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

- 3.2.** Para que o ponto  $T$  pertença ao plano mediador do segmento  $[AV]$ , o ponto  $T$  tem de estar a igual distância de  $A$  e de  $V$ .

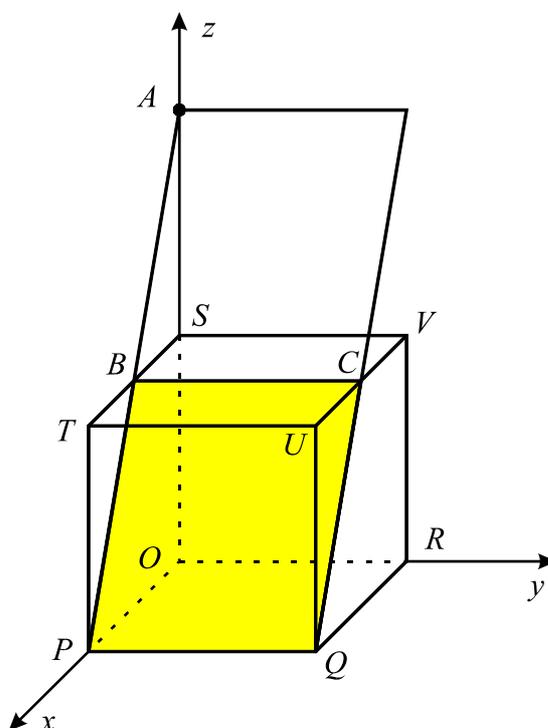
Para determinarmos a distância de  $T$  a  $A$  podemos ter em conta que as coordenadas de  $A$  são  $(0, 0, 4)$  e as de  $T$  são  $(2, 0, 2)$ .

A distância de  $T$  a  $A$  é, portanto, igual a  $\sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$

O segmento  $[TV]$  é uma diagonal de uma face do cubo, pelo que o seu comprimento é  $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Portanto, o ponto  $T$  pertence ao plano mediador do segmento  $[AV]$

- 3.3.** A secção produzida no cubo pelo plano  $PQA$  é o rectângulo colorido na figura.



Dois lados do rectângulo têm comprimento 2 (por serem iguais às arestas do cubo).

Para determinarmos o comprimento de cada um dos outros dois lados, podemos ter em conta que os triângulos  $[ABS]$  e  $[PTB]$  são iguais, pelo que  $\overline{BT} = 1$

Vem, então:  $\overline{BP}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{PT}^2 \Leftrightarrow \overline{BP}^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BP} = \sqrt{5}$

O perímetro do rectângulo é, portanto,  $2 \times 2 + 2 \times \sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5}$