Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 6.05.2008

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

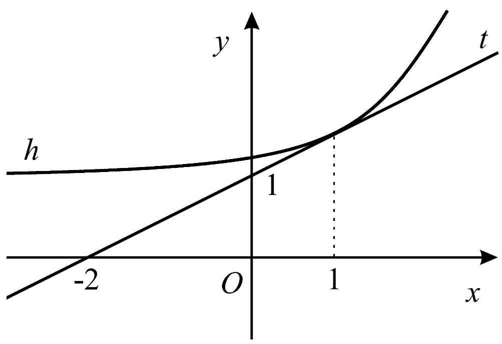
Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico de uma função h
- uma recta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1

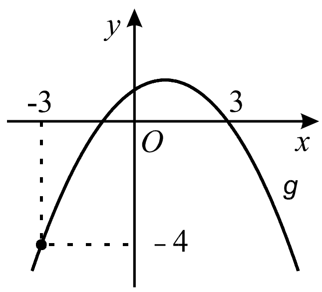


Tal como a figura sugere, a recta t intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2 e o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

Indique o valor de $h'(1)$, derivada da função h no ponto 1

(A) -2 **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 2

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g



Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$

Qual é o valor de $(f \circ g)(-3)$?

(A) -4 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 4

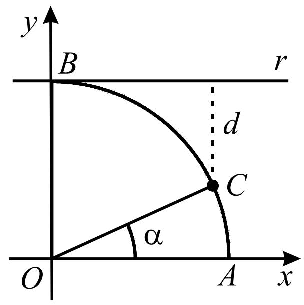
3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial e raio igual a 1.

A recta r tem equação $y = 1$

O ponto C pertence ao arco AB

Seja α a amplitude do ângulo AOC

Qual das expressões seguintes dá a distância d do ponto C à recta r?



(A) $1 + \operatorname{sen}(\alpha)$ **(B)** $1 - \operatorname{sen}(\alpha)$

(C) $1 + \cos(\alpha)$ **(D)** $1 - \cos(\alpha)$

4. Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $\cos(\pi - x)$ **(B)** $\operatorname{sen}(\pi - x)$

(C) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ **(D)** $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por

$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\,(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r?

(A) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\,(0, 1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k\,(1, 2, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $x = 2 \ \wedge \ y = 1$

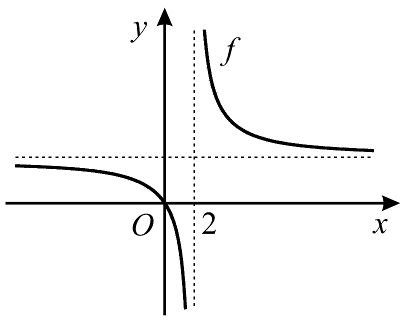
(D) $x = 2 \ \wedge \ z = 1$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, bem como as duas assimptotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere,

- a origem do referencial pertence ao gráfico de f
- uma das assimptotas é paralela ao eixo Ox
- a outra assimptota é paralela ao eixo Oy e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 2

1.1. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x + 9$

Tendo em conta o gráfico de f e a expressão analítica de g, **resolva** a inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$, **completando** a seguinte tabela de variação de sinal, que deve **transcrever** para a sua folha de prova:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	
$g(x)$	
$f(x) \times g(x)$	

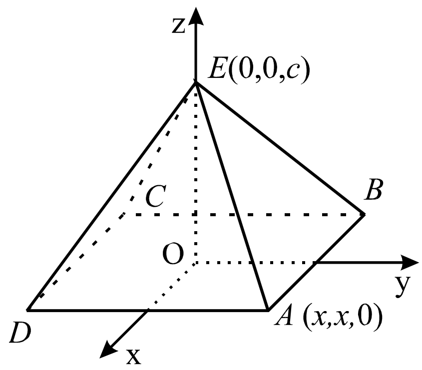
Apresente o **conjunto solução** da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

1.2. Admita agora que:

- a assimptota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 3$
- f é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \dfrac{b}{x - c}$ onde a, b e c designam números reais.

Indique os valores de a e de c e determine o valor de b.

2. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular.



Admita que o vértice E se desloca no semieixo positivo Oz, entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos.

Com o movimento do vértice E, os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano xOy, de tal forma que:

- a pirâmide permanece sempre regular
- o vértice A tem sempre abcissa igual à ordenada
- sendo x a abcissa de A e sendo c a cota de E, tem-se sempre
$$x + c = 6$$

2.1. Seja $V(x)$ o volume da pirâmide, em função de x $(x \in]0, 6[\ )$.

Mostre que $V(x) = 8\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x^3$

2.2. Utilizando a função derivada de V e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função V quanto à monotonia, conclua qual é o valor de x para o qual é máximo o volume da pirâmide e determine esse volume máximo.

2.3. Admita agora que $x = 1$. Indique, para este caso, as coordenadas dos pontos A, B e E e determine uma equação cartesiana do plano ABE.

3. A Maria vai sempre de carro, com o pai, para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito horas da manhã.
Admita que, quando a Maria sai de casa t minutos **depois das sete e meia**, a duração da viagem, em **minutos**, é dada por

$$d(t) = 45 - \frac{5600}{t^2 + 300} \qquad (\,t \in [\,0, 30\,]\ )$$

As aulas da Maria começam sempre às oito e meia.

3.1. Mostre que, se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, chega à escola às 8 h 11 m, mas, se sair de casa às 7 h 55 m, já chega atrasada às aulas.

3.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva o seguinte problema: *Até que horas pode a Maria sair de casa, de modo a não chegar atrasada às aulas?*

A sua resolução deve incluir:

- uma explicação de que, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$
- o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora
- a resposta ao problema em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

FIM

COTAÇÕES

Grupo I .... **50 pontos**

Cada resposta certa .... 10 pontos
Cada resposta errada... 0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .... 0 pontos

Grupo II .... **150 pontos**

1. .... 40 pontos
1.1. .... 20 pontos
1.2. .... 20 pontos

2. .... 65 pontos
2.1. .... 20 pontos
2.2. .... 20 pontos
2.3. .... 25 pontos

3. .... 45 pontos
3.1. .... 20 pontos
3.2. .... 25 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 6.05.2008

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

COTAÇÕES

GRUPO I		**50 pontos**
Cada resposta certa	10 pontos	
Cada resposta errada	0 pontos	
Cada item não respondido ou anulado	0 pontos	
GRUPO II		**150 pontos**
1.	40 pontos	
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
2.	65 pontos	
2.1.	20 pontos	
2.2.	20 pontos	
2.3.	25 pontos	
3.	45 pontos	
3.1.	20 pontos	
3.2.	25 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Situação	Classificação
1. Engano na identificação do item a que o aluno está a responder. **2.** Omissão da identificação do item a que o aluno está a responder.	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o aluno não indica, de forma inequívoca, aquela que pretende que seja classificada.	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de respostas.
4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
5. Ilegibilidade da resposta.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
6. Item com etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual eventualmente se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.
7. Etapa com passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
8. Item ou etapa cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho.	O classificador deve enquadrar a resposta do aluno numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das cotações indicadas.
9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [Exemplo: «usando métodos analíticos»].	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.

10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.	O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos. Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no Programa.
11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.	A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.
12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, subtrair um ponto na cotação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
13. Erro ocasional num cálculo.	Subtrair um ponto à cotação da etapa em que ocorre o erro.
14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.
15. Erro na resolução de uma etapa.	A resolução dessa etapa é classificada de acordo com o erro cometido. Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação. Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O aluno não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.
17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [Exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o aluno escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o aluno apresenta-o em metros].	Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.

18. Na apresentação do resultado final não está expressa a unidade de medida [Exemplo: «15» em vez de «15 metros»]	A etapa relativa ao resultado final é classificada tal como se a unidade de medida estivesse indicada.
19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.
20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item.
21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total do item, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Critérios específicos

1.1. 20

Identificar o zero de f e obter o zero de g **(ver nota 1)** ....(2+2) 4

Primeira linha do quadro 2

Segunda linha do quadro **(ver nota 2)** 4

Terceira linha do quadro 3

Quarta linha do quadro **(ver nota 3)** 3

Resposta **(ver nota 4)**.. 4

Notas:

1. O aluno pode não explicitar esta etapa. Pode limitar-se a colocar os zeros na primeira linha do quadro.
Mesmo que esta etapa esteja incorrecta, as seguintes devem ser classificadas de acordo com o erro cometido (ver critério geral 15).

2. A classificação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Linha correcta 4

Linha correcta, a menos da falta de indicação, na coluna correspondente a $x = 2$, de que a função não está aí definida 2

Outras situações 0

3. Se esta linha estiver de acordo com as duas anteriores, mesmo que incorrectas, deve ser atribuída a cotação total desta etapa.

4. A classificação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Resposta de acordo com a última linha do quadro 4

Resposta de acordo com a última linha do quadro, a menos de uma troca de intervalo aberto para fechado ou vice-versa 3

Outras situações 0

1.2. .... **20**

Indicar o valor de a 5

Indicar o valor de c 5

Obter o valor de b 10

Escrever a equação $f(0)=0$ 5

Concluir que $b=6$ 5

2.1. .... **20**

Aresta da base $=2x$ 4

Área da base $=4x^2$ 5

Altura $=6-x$ 4

$V(x)=\frac{1}{3}\times 4x^2\times(6-x)$ 5

$V(x)=8\,x^2-\frac{4}{3}\,x^3$ 2

2.2. .... **20**

Determinar $V'(x)$ 6

Derivar $8\,x^2$ 2

Derivar $\frac{4}{3}\,x^3$ 3

Conclusão 1

Escrever a equação $V'(x)=0$ 2

Resolver a equação $V'(x)=0$ 6

Factorizar o polinómio ou substituir, na fórmula resolvente, $a,\ b$ e c pelos respectivos valores 2

Concluir que $V'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=4$ **(ver nota 1)** 4

Monotonia da função V **(ver nota 2)** 4

Resposta 2

Valor de x para o qual é máximo o volume da pirâmide 1

Volume máximo 1

Notas:

1. A não exclusão do valor 0 deverá conduzir a uma desvalorização de 1 ponto. Esta exclusão pode ser apresentada em qualquer fase da resolução.

2. Se o aluno apresentar o estudo da monotonia através de um quadro, a cotação desta etapa deve ser repartida da seguinte forma:

Primeira linha do quadro (relativa à variável x) 1

Segunda linha do quadro (relativa ao sinal da derivada) 1

Terceira linha do quadro (relativa à monotonia) 2

2.3. ....**25**

Indicar as coordenadas do ponto A 1

Indicar as coordenadas do ponto B 2

Indicar as coordenadas do ponto E 2

Determinar as coordenadas de dois vectores não colineares do plano ... (3+3) 6

Determinar as coordenadas de um vector normal ao plano 9

Escrever as condições de perpendicularidade na forma de duas equações do primeiro grau cujas incógnitas são as coordenadas do vector a determinar ....(3+3) 6

Restantes cálculos 3

Escrever uma equação cartesiana do plano 5

3.1. ....**20**

7 h 40 m $\rightarrow t = 10$ 4

Calcular $d(10)$ 4

Concluir o pretendido 1

7 h 55 m $\rightarrow t = 25$ 4

Calcular $d(25)$ 4

Concluir o pretendido 3

3.2. ....**25**

Explicar a condição $t + d(t) \leq 60$ **(ver nota 1)** 6

Apresentar os gráficos 7

Gráfico da função definida por $y = t + d(t)$ **(ver nota 2)** 4

Recta de equação $y = 60$ 3

Determinar a abcissa do ponto de intersecção dos dois gráficos 6

Responder ao problema 6

Notas:

1. A explicação deverá conter (explicita ou implicitamente) os seguintes tópicos:
- explicação do valor 60 (tempo, em minutos, que decorre das sete e meia às oito e meia);
- explicação da soma $t + d(t)$ (soma do tempo que decorre das sete e meia até ao instante em que a Maria sai de casa com o tempo da viagem de casa à escola);
- explicação da desigualdade (o tempo que decorre das sete e meia até à chegada da Maria à escola não pode exceder o tempo que decorre entre as sete e meia e as oito e meia).

Cada tópico correctamente apresentado vale 2 pontos.

2. Se o gráfico não respeitar o domínio, a classificação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser de 3 pontos.

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. $h'(1)$ é o declive da recta t, que é igual a $\frac{1}{2}$

Resposta **C**

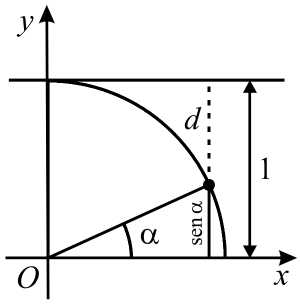
2. $(f \circ g)(-3) = f[g(-3)] = f(-4) = |-4| = 4$

Resposta **D**

3. De acordo com a figura, tem-se

$d + \operatorname{sen} \alpha = 1$, pelo que

$d = 1 - \operatorname{sen} \alpha$



Resposta **B**

4. Sendo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\pi - x$ é a amplitude de um ângulo do segundo quadrante e $\frac{3\pi}{2} - x$ é a amplitude de um ângulo do terceiro quadrante.
Ora, no terceiro quadrante, quer o seno, quer o co-seno são negativos.
No segundo quadrante, apenas o seno é positivo.

Resposta **B**

5. Sendo $(0,0,1)$ um vector director da recta r, tem-se que esta recta é paralela ao eixo Oz. A condição $x = 2 \;\wedge\; y = 1$ também define uma recta paralela ao eixo Oz (dado que corresponde à intersecção de dois planos paralelos a este eixo).

Resposta **C**

Grupo II

1.1. Tem-se o seguinte quadro:

x	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x) \times g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$

$n.d.$ - não definida

Portanto, o conjunto solução da inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$ é $]-\infty, -3] \cup [0, 2[$

1.2. Do gráfico de f resulta que $f(x) = 3 + \dfrac{b}{x-2}$

Como $f(0) = 0$, vem $3 + \dfrac{b}{0-2} = 0$, pelo que $\dfrac{b}{-2} = -3$,

ou seja, $b = 6$

Tem-se, portanto, $a = 3$, $b = 6$ e $c = 2$

2.1. O volume de uma pirâmide é igual a $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da Base} \times \textit{Altura}$

A base da pirâmide é um quadrado de lado $2x$, pelo que a sua área é $4x^2$

A altura da pirâmide é a cota c do ponto E

Uma vez que $x + c = 6$, vem $c = 6 - x$

Assim, $V(x) = \dfrac{1}{3} \times 4x^2 \times (6 - x) = 8\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x^3$

2.2. Tem-se $V'(x) = 16\,x - 4\,x^2$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 16\,x - 4\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x\,(16 - 4x) = 0$

Como $x \in\,]0, 6[$, tem-se $x \neq 0$, pelo que

$x\,(16 - 4x) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Pode elaborar-se o o seguinte quadro:

x	0	4	6
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	$\nearrow$	*Máx*	$\searrow$

$V(4) = 8 \times 4^2 - \dfrac{4}{3} \times 4^3 = 128 - \dfrac{256}{3} = \dfrac{128}{3}$

O volume da pirâmide é máximo quando $x = 4$, sendo esse volume igual a $\dfrac{128}{3}$

2.3. Tem-se: $A(1,1,0)$ $B(-1,1,0)$ $E(0,0,5)$

Um vector perpendicular ao plano é um vector perpendicular a dois vectores não colineares do plano, como, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$. Tem-se:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,1,0) - (1,1,0) = (-2,0,0)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (0,0,5) - (1,1,0) = (-1,-1,5)$

Seja $\overrightarrow{n}\ (a,b,c)$ um vector perpendicular a estes dois vectores. Tem-se:

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (a,b,c) \cdot (-2,0,0) = 0 \Leftrightarrow -2a + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow (a,b,c) \cdot (-1,-1,5) = 0 \Leftrightarrow -a - b + 5c = 0 \Leftrightarrow a + b = 5c$

Ora, $a = 0 \wedge a + b = 5c \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 5c$

Fazendo, por exemplo, $c = 1$, vem $\overrightarrow{n} = (0,5,1)$

Assim, uma equação de um plano perpendicular a $\overrightarrow{n}$ é da forma $5y + z + d = 0$

Como o plano ABE contém o ponto $A(1,1,0)$, vem $d = -5$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABE é $5y + z - 5 = 0$

3.1. Se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, sai de casa 10 minutos depois das sete e meia, pelo que $t = 10$. A duração da viagem, em minutos, é, assim, $d(10) = 45 - \frac{5600}{10^2 + 300} = 31$

Tem-se 7 h 40 m $+$ 31 m $=$ 8 h 11 m

Se a Maria sair de casa às 7 h 55 m, sai de casa 25 minutos depois das sete e meia, pelo que $t = 25$. A duração da viagem, em minutos, é, assim, $d(25) = 45 - \frac{5600}{25^2 + 300} \approx 39$

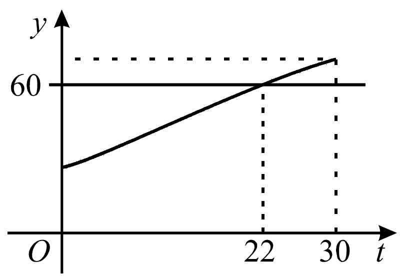
Tem-se 7 h 55 m $+$ 39 m $=$ 8 h 34 m, pelo que a Maria chega atrasada às aulas.

3.2. Para a Maria não chegar atrasada às aulas, o tempo que decorre desde as sete e meia até à hora de chegada à escola não pode exceder 60 minutos, que é o tempo que decorre entre as sete e meia e as oito e meia.

Portanto, a soma do tempo t, que decorre desde as sete e meia até que ela sai de casa, com o tempo $d(t)$, da viagem, não pode exceder 60 minutos.

Assim, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$

Na figura junta está:



- o gráfico, obtido na calculadora, da função definida por $y = t + d(t)$, ou seja, da função definida por $y = t + 45 - \frac{5600}{t^2 + 300}$
- a recta de equação $y = 60$

O ponto de intersecção das duas linhas tem abcissa 22 (valor arredondado às unidades), pelo que, para não chegar atrasada às aulas, a Maria tem de sair de casa até 22 minutos depois das sete e meia, ou seja , até às 7 h 52 m.