Teste Intermédio

# Matemática A

**Versão 1**

Duração do Teste: 90 minutos | 29.01.2009

**11.º Ano de Escolaridade**

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

## Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

**1.** Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

A intersecção desta superfície com o plano $xOy$ é

**(A)** o conjunto vazio

**(B)** um ponto

**(C)** uma circunferência

**(D)** um círculo

**2.** Considere, num referencial o. n. $xOy$, a recta $r$ de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$

Seja $s$ a recta perpendicular a $r$ que passa no ponto de coordenadas $(1, 4)$

Qual é a equação reduzida da recta $s$ ?

**(A)** $y = 2x + 2$

**(B)** $y = -2x + 6$

**(C)** $y = -2x + \frac{5}{3}$

**(D)** $y = 2x + \frac{3}{5}$

**3.** Considere a equação trigonométrica $\cos x = -0{,}3$

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem **apenas uma** solução. Em qual deles?

**(A)** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

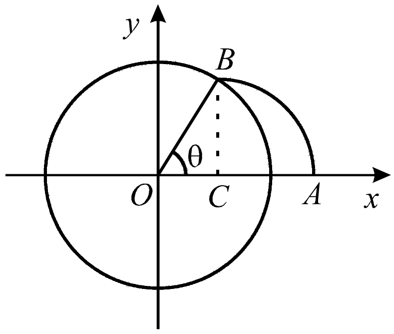
**(B)** $[0, \pi]$

**(C)** $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

**(D)** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

**4.** Na figura estão representados, em referencial o.n. $xOy$:

- o círculo trigonométrico
- o raio $[OB]$ deste círculo
- o arco de circunferência $AB$, de centro no ponto $C$



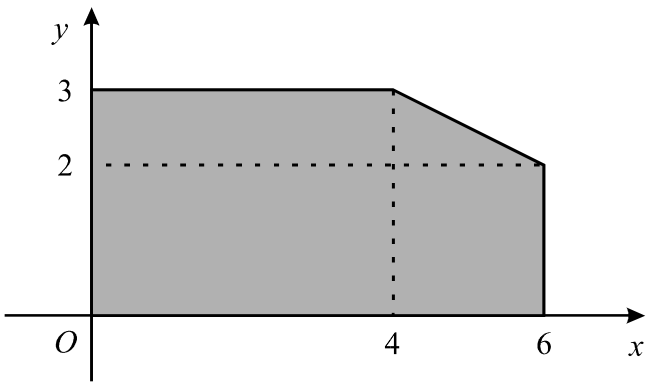

Tal como a figura sugere, o ponto $B$ pertence ao primeiro quadrante, os pontos $A$ e $C$ pertencem ao eixo $Ox$ e a recta $BC$ é perpendicular a este eixo.
Seja $\theta$ a amplitude do ângulo $AOB$

Qual é a abcissa do ponto $A$ ?

**(A)** $1 + \operatorname{sen} \theta$   **(B)** $1 + \cos \theta$

**(C)** $\cos \theta + \operatorname{sen} \theta$   **(D)** $1 + \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$

**5.** Num certo problema de Programação Linear, pretende-se maximizar a função objectivo, a qual é definida por $L = 3x + y$
Na figura está representada a região admissível.




Qual é a solução desse problema?

**(A)** $x = 6$ e $y = 3$   **(B)** $x = 4$ e $y = 2$

**(C)** $x = 4$ e $y = 3$   **(D)** $x = 6$ e $y = 2$

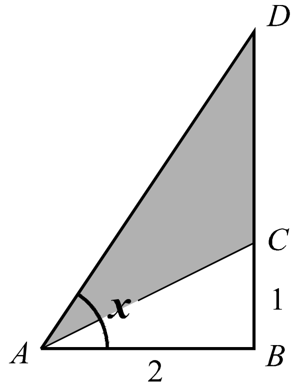
## Grupo II

Nas respostas a itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

**1.** Relativamente à figura junta, sabe-se que:

- o triângulo $[ABD]$ é rectângulo
- o ponto $C$ pertence ao cateto $[BD]$
- $x$ designa a amplitude, em radianos, do ângulo $BAD$
- $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 1$



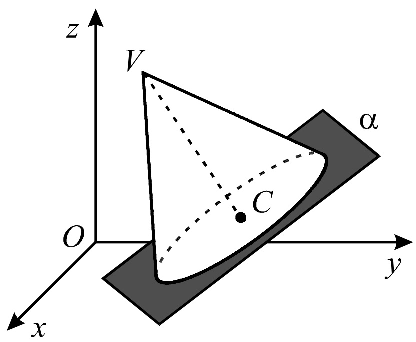

**1.1.** Mostre que a área do triângulo $[ACD]$ é dada por $2\,\mathrm{tg}(x) - 1$

**1.2.** Determine o valor de $x$ para o qual a área do triângulo $[ACD]$ é igual a $1$

**1.3.** Sabendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{5}{13}$ e que $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, determine o valor de $2\,\mathrm{tg}(a) - 1$

**2.** Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cone de revolução. Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano $\alpha$ de equação $x + 2y - 2z = 11$
- o vértice $V$ do cone tem coordenadas $(1, 2, 6)$
- o ponto $C$ é o centro da base do cone




**2.1.** Determine uma equação do plano $\gamma$ que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano $\alpha$

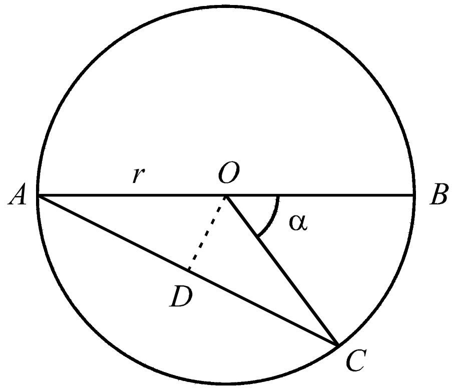
**2.2.** Seja $\beta$ o plano definido pela equação $2x - y + z = 3$
Averigúe se os planos $\alpha$ e $\beta$ são perpendiculares.

**2.3.** Seja $W$ o ponto simétrico do ponto $V$, em relação ao plano $xOy$. Indique as coordenadas do ponto $W$ e escreva uma condição que defina o segmento de recta $[VW]$.

**2.4.** Sabendo que o raio da base do cone é igual a $3$, determine o volume do cone.
**Sugestão**: comece por escrever uma condição que defina a recta que contém o vértice do cone e que é perpendicular ao plano $\alpha$ e utilize-a para determinar as coordenadas do ponto $C$.

**3.** Na figura está representada uma circunferência de centro $O$ e raio $r$.

Sabe-se que:




- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência
- O ponto $C$ pertence à circunferência
- $\alpha$ é a amplitude do ângulo $COB$
- $[OD]$ é perpendicular a $[AC]$

**Prove que** $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 4\,r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

**Sugestão**

*Percorra as seguintes etapas:*

- *Justifique que o triângulo* $[OAC]$ *é isósceles*
- *Justifique que* $\overline{AC} = 2\,\overline{AD}$
- *Justifique que a amplitude do ângulo* $CAB$ *é* $\frac{\alpha}{2}$
- *Escreva* $\overline{AD}$, *em função de* $\frac{\alpha}{2}$ *e de* $r$
- *Conclua que* $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 4\,r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I** ......................................**(5 $\times$ 10 pontos)** ................................ **50 pontos**

**Grupo II** ........................................................................................ **150 pontos**

**1.** ............................................................................................ 60 pontos

**1.1.** ................................................................... 20 pontos

**1.2.** ................................................................... 20 pontos

**1.3.** ................................................................... 20 pontos

**2.** ............................................................................................ 70 pontos

**2.1.** ................................................................... 15 pontos

**2.2.** ................................................................... 15 pontos

**2.3.** ................................................................... 20 pontos

**2.4.** ................................................................... 20 pontos

**3.** ............................................................................................ 20 pontos

**Total** ...........................................................................................**200 pontos**