Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 4.12.2009

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \dfrac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + ... + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2\, p_1 + ... + (x_n - \mu)^2\, p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Quantos números pares de cinco algarismos diferentes se podem escrever, utilizando os algarismos do número 12345 ?

(A) 24 **(B)** 48 **(C)** 60 **(D)** 96

2. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o segundo elemento é 2009.

Quantos elementos dessa linha são maiores do que *um milhão*?

(A) 2004 **(B)** 2005 **(C)** 2006 **(D)** 2007

3. Uma variável aleatória X tem distribuição normal.
Sabe-se que $P(X > 50)$ é inferior a $P(X < 40)$

Qual dos números seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória X ?

(A) 42 **(B)** 45 **(C)** 48 **(D)** 51

4. Na figura 1 estão representados oito cartões, numerados de 1 a 8.

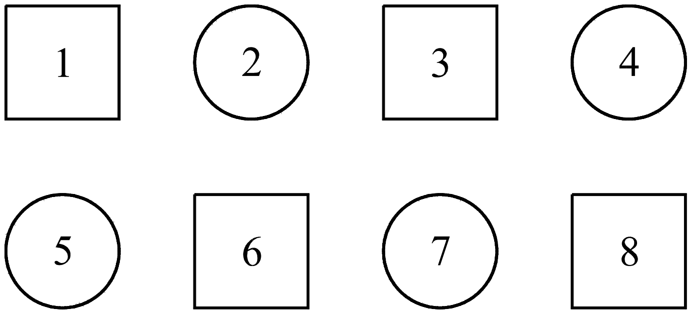

Figura 1

Escolhe-se, ao acaso, um destes oito cartões e observa-se a sua forma e o número nele inscrito.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

A : «O número do cartão escolhido é maior do que $\sqrt{30}$ »

B : «O cartão escolhido é um círculo»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A \mid B)$?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

5. A estatística revela que o basquetebolista *Zé Mão Quente* falha 10% dos lances livres que executa.

Num treino, o *Zé Mão Quente* vai executar uma série de oito lances livres.

Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a

$$1 - 0{,}9^8 - {}^8C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$$

(A) O *Zé Mão Quente* concretiza pelo menos seis lances livres.

(B) O *Zé Mão Quente* concretiza pelo menos sete lances livres.

(C) O *Zé Mão Quente* concretiza no máximo seis lances livres.

(D) O *Zé Mão Quente* concretiza no máximo sete lances livres.

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias. **Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura 2 está representado um prisma pentagonal regular. Quatro dos vértices desse prisma estão designados pelas letras A, B, E e O.

1.1. Pretende-se designar os **restantes seis** vértices do prisma, utilizando letras do alfabeto português (23 letras).

De quantas maneiras diferentes podemos designar esses seis vértices, de tal modo que os cinco vértices de uma das bases sejam designados pelas cinco vogais?

Nota: não se pode utilizar a mesma letra para designar vértices diferentes.

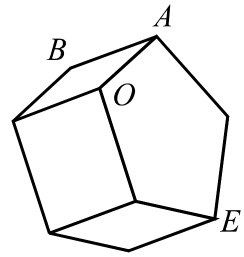

Figura 2

1.2. Ao escolhermos **três** vértices do prisma, pode acontecer que eles pertençam todos a uma mesma face. Por exemplo, os vértices A, B e O pertencem todos a uma mesma face, o mesmo acontecendo com os vértices A, E e O.

Escolhem-se aleatoriamente três dos dez vértices do prisma.

Qual é a probabilidade de esses três vértices pertencerem todos a uma mesma face? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.3. Escolhe-se aleatoriamente um vértice **em cada base** do prisma.

Qual é a probabilidade de o segmento de recta definido por esses dois vértices ser diagonal de uma face?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Lança-se um dado **não** equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Seja X a variável aleatória «*número saído no lançamento efectuado*».

Admita que, para certos números reais a e b, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,2	a	0,2	b	0,1	0,15

2.1. Determine a e b, sabendo que o valor médio da variável aleatória X é $3{,}4$

2.2. Em relação ao lançamento **deste** dado não equilibrado, sejam C e D os acontecimentos:

C : «Sair um número ímpar»

D : «Sair um número maior do que 4»

Averigúe se os acontecimentos C e D são independentes.

3.

3.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) > 0$

Prove que:

$$P(A) \times \left[P(B|A) - 1 \right] + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A})$$

Nota: $P(B|A)$ designa uma probabilidade condicionada.

3.2. Num encontro desportivo, participam atletas de vários países, entre os quais Portugal.

Metade dos atletas portugueses que participam no encontro são do sexo feminino.

Escolhido ao acaso um atleta participante no encontro, a probabilidade de ele ser estrangeiro ou do sexo masculino é 90%.

Participam no encontro duzentos atletas.

Quantos são os atletas portugueses?

Nota: se desejar, pode utilizar a igualdade do item 3.1. na resolução deste problema; nesse caso, comece por explicitar os acontecimentos A e B, no contexto do problema.

4. Um saco contém bolas azuis e bolas verdes, indistinguíveis ao tacto.

Redija, no contexto desta situação, o enunciado de um problema de cálculo de probabilidade, inventado por si, que admita como resposta correcta

$$\frac{{}^{7}C_4 \times 3 \; + \; {}^{7}C_5}{{}^{10}C_5}$$

No enunciado que apresentar, deve explicitar claramente:

- o número total de bolas existentes no saco;
- o número de bolas de cada cor existentes no saco;
- a experiência aleatória;
- o acontecimento cuja probabilidade pretende que seja calculada (e cujo valor terá de ser dado pela expressão apresentada).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ....(5 $\times$ 10 pontos)	**50 pontos**
Grupo II	**150 pontos**
1.	**50 pontos**
1.1. .... 15 pontos	
1.2. .... 20 pontos	
1.3. .... 15 pontos	
2.	**40 pontos**
2.1. .... 20 pontos	
2.2. .... 20 pontos	
3.	**40 pontos**
3.1. .... 20 pontos	
3.2. .... 20 pontos	
4.	**20 pontos**
TOTAL	**200 pontos**