TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

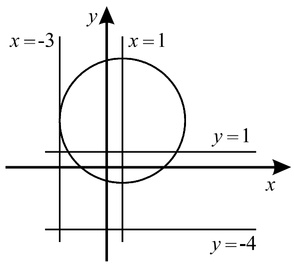
RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. A recta r é paralela à bissectriz dos quadrantes pares e tem ordenada na origem igual a 2. Portanto, a sua equação reduzida é $y = -x + 2$

Resposta **C**

2. Na figura seguinte, está representada a circunferência de equação $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$, bem como as rectas de equações $x = -3$, $x = 1$, $y = -4$ e $y = 1$



Como se vê na figura, das quatro rectas, a única que é tangente à circunferência é a recta de equação $x = -3$

Resposta **A**

3. Uma pirâmide com 31 vértices tem por base um polígono com 30 vértices. Portanto, uma pirâmide com 31 vértices tem 30 arestas na base.

Como a cada vértice da base corresponde uma, e uma só, aresta lateral, existem também 30 arestas laterais.

Assim, uma pirâmide com 31 vértices tem, ao todo, 60 arestas.

Resposta **D**

4. Podemos excluir as opções B e C, uma vez que, nestas duas opções, o triângulo e o sector circular não são adjacentes, ao contrário do que acontece na planificação.

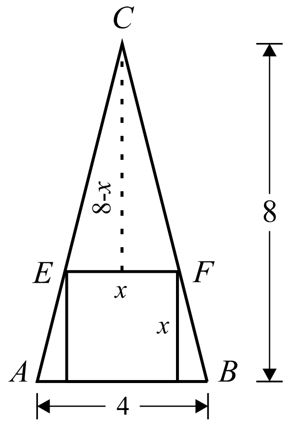
A opção D também não é a correcta, pois, nesta opção, o triângulo e o quadrado não têm um vértice em comum, ao contrário do que acontece na planificação.

Resposta **A**

5. Os triângulos $[ABC]$ e $[EFC]$ são semelhantes.

Como 8 é o dobro de 4, então, $8-x$ é o dobro de x, ou seja, $8-x=2x$

$8-x=2x \;\Leftrightarrow\; 3x=8 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{8}{3}$



Resposta **C**

GRUPO II

1.1. $[CD]$ é a base maior do trapézio. Como $\overline{CD}$ é igual à abcissa do ponto D, tem-se $\overline{CD}=8$

$[BA]$ é a base menor do trapézio. Como $\overline{BA}$ é igual à abcissa do ponto A, tem-se $\overline{BA}=4$

A altura do trapézio é igual à diferença entre a ordenada do ponto D e a ordenada do ponto A, ou seja, é $10-7=3$

A área do trapézio é, portanto, $\frac{8+4}{2}\times 3=18$

1.2. Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento $[AD]$

Tem-se:

$$\overline{PA}=\overline{PD} \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-7)^2=(x-8)^2+(y-10)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2-8x+16+y^2-14y+49 = x^2-16x+64+y^2-20y+100 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -8x+16-14y+49 = -16x+64-20y+100 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 6y = -8x+99 \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{8}{6}x+\frac{99}{6} \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{4}{3}x+\frac{33}{2}$$

Assim, a equação reduzida da mediatriz do segmento $[AD]$ é $y=-\frac{4}{3}x+\frac{33}{2}$

1.3. A região sombreada é limitada pelas rectas de equações $x=0$, $x=4$ e $y=7$ e pela circunferência de centro no ponto $A(4,7)$ e raio igual à norma de $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(8,10)-(4,7)=(4,3)$ pelo que $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

Assim, uma condição que define a região sombreada, incluindo a fronteira, é

$(x-4)^2+(y-7)^2\leq 25 \;\wedge\; 0\leq x\leq 4 \;\wedge\; y\leq 7$

2.1. Tem-se $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Assim, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$

$F + \overrightarrow{CD} = F + \overrightarrow{FE} = E$ Assim, $F + \overrightarrow{CD} = E$

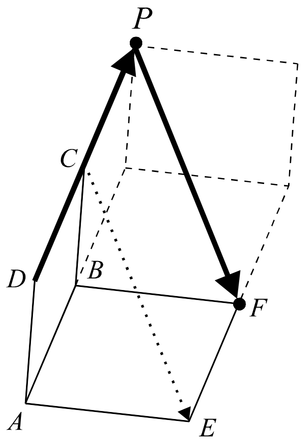
Apresentam-se a seguir dois processos para determinar $D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$

1.º Processo

$$D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = D + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = D + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} =$$
$$= C + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = C + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AB} = E + \overrightarrow{AB} = E + \overrightarrow{EF} = F$$

Assim, $D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = F$

2.º Processo



$D + 2\overrightarrow{AB} = P$

$P + \overrightarrow{CE} = F$

Assim, $D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = F$

2.2.1. A secção produzida no cubo pelo plano ABG é o rectângulo $[ABGH]$

A área deste rectângulo é igual a $\overline{AB} \times \overline{BG}$

Tem-se $\overline{AB} = \sqrt{(13-11)^2 + (2+1)^2 + (8-2)^2} = 7$

E, como $\overline{AB} = 7$, tem-se $\overline{BG} = 7\sqrt{2}$

A área da secção é, portanto, igual a $7 \times 7\sqrt{2}$, ou seja, $49\sqrt{2}$

2.2.2. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto F

Tem-se $F = E + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (13,2,8) - (11,-1,2) = (2,3,6)$

Portanto, $F = E + \overrightarrow{AB} = (8,5,0) + (2,3,6) = (10,8,6)$

Assim, a recta que contém o ponto F e é paralela ao eixo Oz pode ser definida pela condição $x = 10 \ \wedge \ y = 8$
ou pela condição $(x,y,z) = (10,8,6) + k(0,0,1),\ k \in \mathbb{R}$

3.1. Apresenta-se um exemplo de uma resposta correcta a este item.

As rectas DQ e VF são concorrentes.

As rectas EH e FB são não complanares.

A recta PQ e o plano HGB são estritamente paralelos.

A recta FQ e o plano ADH são concorrentes.

Os planos BQV e PQR são perpendiculares.

3.2. Dos vários processos de resolução deste item, apresentam-se dois.

1.º Processo

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-8z+16=1+1+16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=18$$

Portanto, o ponto V tem cota igual a 4

Assim, a altura da pirâmide é igual a 4

A medida do lado da base da pirâmide é igual à abcissa do ponto P. Este ponto é um dos pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo Ox, pelo que tem ordenada nula e cota nula.

Substituindo, na equação da superfície esférica, y por zero e z por zero, obtém-se

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=2$$

Como P pertence ao semieixo positivo Ox, tem-se $P(2,0,0)$ e, portanto, a medida do lado da base da pirâmide é igual a 2 e a área da base é igual a 4

Assim, o volume da pirâmide é $\dfrac{4\times 4}{3}=\dfrac{16}{3}$

2.º Processo

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-8z+16=1+1+16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=18$$

Portanto, o ponto V tem coordenadas $(1,1,4)$

Assim, a altura da pirâmide é igual a 4 e, atendendo a que a pirâmide é quadrangular regular, o centro da base é o ponto $(1,1,0)$, pelo que a base tem lado 2

O volume da pirâmide é, portanto, $\dfrac{2^2\times 4}{3}=\dfrac{16}{3}$