TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

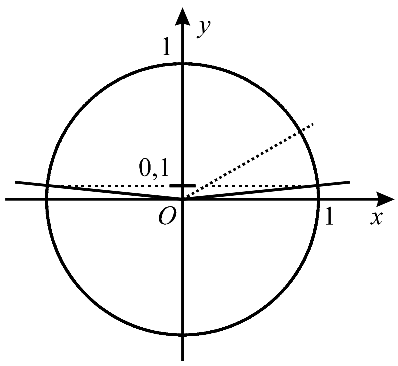
GRUPO I

1. O lado extremidade do ângulo que tem π radianos de amplitude coincide com o semieixo negativo Ox

Uma vez que $\pi \approx 3{,}14$, o lado extremidade do ângulo que tem 3 radianos de amplitude é o que está representado na opção B.

Resposta **B**

2. Na figura, estão representados o círculo trigonométrico, os lados extremidade dos ângulos cujo seno é $0{,}1$ e, a tracejado, o lado extremidade do ângulo que tem $\frac{\pi}{6}$ radianos de amplitude.



Como se pode observar:

- no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}1$ tem uma solução;
- no intervalo $\left[0, \pi\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}1$ tem duas soluções;
- no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}1$ tem uma solução;
- no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}1$ não tem solução.

Resposta **D**

3. Vector director da recta r: $(2, 0)$

Vector director da recta s: $(4, 3)$

$\|(2, 0)\| = 2 \qquad \|(4, 3)\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Sendo α o ângulo das rectas r e s,

$\cos\alpha = \frac{|(2{,}0) \cdot (4{,}3)|}{2 \times 5} = \frac{8}{2\times 5} = 0{,}8$ pelo que $\alpha \approx 37°$

Resposta **A**

4. O ponto $(0,2,3)$ não pertence à recta r, logo este ponto não é a intersecção da recta r com o plano α

O ponto $(0,0,0)$ pertence à recta r e ao plano α. Logo, a recta e o plano não são estritamente paralelos. Assim, a intersecção da recta com o plano ou é aquele ponto ou é a própria recta.

Vamos então considerar um vector director da recta e um vector perpendicular ao plano α e averiguar se são, ou não, perpendiculares.

Vector director da recta r: $(1,2,3)$

Vector perpendicular ao plano α: $(3,0,-1)$

$(1,2,3)\,.\,(3,0,-1) = 3 + 0 + (-3) = 0$

Como os vectores são perpendiculares, conclui-se que a recta está contida no plano.

$\boxed{\text{Resposta } \mathbf{D}}$

5. O objectivo é maximizar $800\,x + 1000\,y$, sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ y \leq 30 \end{cases}$$

Estas restrições excluem as opções C e D.

Na opção A, S é o ponto $(70,30)$

Na opção B, S é o ponto $(100,0)$

Como $800 \times 70 + 1000 \times 30 > 800 \times 100 + 1000 \times 0$, podemos concluir que a opção correcta é a opção A.

$\boxed{\text{Resposta } \mathbf{A}}$

GRUPO II

1.1. Área da região sombreada $=$

$=$ Área do quadrado $[ABCD]$ $-$ Área do triângulo $[APD]$

Como $D\widehat{P}A = P\widehat{A}B = x$, tem-se: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DP}} = \dfrac{2}{\overline{DP}}$

pelo que $\overline{DP} = \dfrac{2}{\operatorname{tg} x}$

Então, a área da região sombreada é igual a

$$4 - \frac{\overline{AD} \times \overline{DP}}{2} = 4 - \frac{2 \times \frac{2}{\operatorname{tg} x}}{2} = 4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$$

1.2. $4 - \dfrac{2}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{12 - 2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 4 - \dfrac{2}{\operatorname{tg} x} = 4 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Como $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $x = \frac{\pi}{3}$

1.3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{15}{17} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = -\dfrac{15}{17} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{15}{17}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{225}{289} \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{64}{289}$

Como $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos x = \dfrac{8}{17}$

Vem, então: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \dfrac{15}{8}$

Assim, a área da região sombreada é

$$4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 4 - \frac{2}{\frac{15}{8}} = 4 - \frac{16}{15} = \frac{44}{15}$$

2.1. Como as coordenadas do ponto C são $(4,1)$ e as coordenadas do ponto A são $(0,-2)$, vem $\overrightarrow{AC} = (4,1) - (0,-2) = (4,3)$

Assim, o vector de coordenadas $(3,-4)$ tem a direcção da recta t e, portanto, o declive desta recta é igual a $-\dfrac{4}{3}$

Como a ordenada na origem da recta t é -2, a equação reduzida desta recta é

$$y = -\frac{4}{3}x - 2$$

2.2. O raio do círculo é igual a 5, pelo que a área do círculo é 25π

Como a área da região sombreada é $\dfrac{25\pi}{6}$, podemos concluir que a área da região sombreada é $\dfrac{1}{6}$ da área do círculo.

Portanto, a amplitude do ângulo QCP é um sexto de $360°$, ou seja, é $60°$

Vem, então:

$$\overrightarrow{CP} . \overrightarrow{CQ} = \left\|\overrightarrow{CP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CQ}\right\| \times \cos 60° = 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

3.1. A altura da pirâmide é a cota do ponto V, que é igual a 6

O ponto A tem coordenadas $(x, 0, 0)$

Como o ponto A pertence ao plano ADV, tem-se

$$6x + 18 \times 0 - 5 \times 0 = 24 \Leftrightarrow 6x = 24 \Leftrightarrow x = 4$$

Portanto, as coordenadas do ponto A são $(4, 0, 0)$

Tem-se, então, $\overline{AB} = \sqrt{(5-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{10}$

A área da base da pirâmide é, portanto, igual a 10

O volume da pirâmide é igual a $\frac{10 \times 6}{3} = 20$

3.2. O ponto V é o ponto de intersecção de três planos: o plano de equação $z = 6$, o plano ADV e o plano ABV

Assim, resolvendo o sistema $\begin{cases} z = 6 \\ 6x + 18y - 5z = 24 \\ 18x - 6y + 5z = 72 \end{cases}$, obtemos as coordenadas do ponto V

$$\begin{cases} z = 6 \\ 6x + 18y - 5z = 24 \\ 18x - 6y + 5z = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ 6x + 18y - 30 = 24 \\ 18x - 6y + 30 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ 6x + 18y = 54 \\ 18x - 6y = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ -18x - 54y = -162 \\ 18x - 6y = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ -60y = -120 \\ 18x - 6y = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ y = 2 \\ 18x - 12 = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Deste modo, tem-se $V(3, 2, 6)$

3.3. O plano ADV é definido pela equação $6x + 18y - 5z = 24$

Então, o vector de coordenadas $(6, 18, -5)$ é perpendicular ao plano ADV, sendo portanto um vector director da recta r

Uma condição que define a recta r é $\frac{x+1}{6} = \frac{y+15}{18} = \frac{z-5}{-5}$

É referido no enunciado que o ponto B tem coordenadas $(5, 3, 0)$

Como é verdade que $\frac{5+1}{6} = \frac{3+15}{18} = \frac{0-5}{-5}$, conclui-se que a recta r contém o ponto B