

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 19.01.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \cdot \text{tgb}}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na Figura 1, está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \log_{25}(x)$

P é o ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{1}{2}$

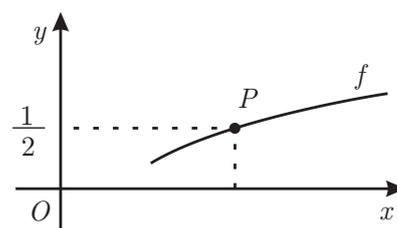


Figura 1

Qual é a abcissa do ponto P ?

- (A) $\frac{25}{2}$ (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{5}{2}$
2. Os vinte e cinco alunos de uma turma do 12.º ano distribuem-se, por idade e sexo, de acordo com a tabela seguinte.

	17 anos	18 anos
Rapazes	4	2
Raparigas	11	8

Escolhe-se, ao acaso, um dos vinte e cinco alunos da turma.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «O aluno escolhido é do sexo masculino»

B : «O aluno escolhido tem 18 anos»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{14}{25}$ (D) $\frac{2}{25}$

3. O terceiro elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 45.

Qual é o penúltimo elemento dessa linha?

- (A) 12 (B) 11 (C) 10 (D) 9

4. A Filipa pratica atletismo.

O tempo X , em segundos, que a Filipa demora a correr os 400 metros é uma variável aleatória bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 80.

Sabe-se que $P(78 < X < 80) = 0,3$

Para um certo valor de a , tem-se $P(X > a) = 0,2$

Qual é o valor de a ?

- (A) 88 (B) 84 (C) 82 (D) 78

5. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado quinze vezes.

Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}$$

- (A) A face 4 sai pelo menos duas vezes.
(B) A face 4 sai pelo menos uma vez.
(C) A face 4 sai no máximo duas vezes.
(D) A face 4 sai no máximo uma vez.

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_4(12x + 8) \geq 2 + \log_4(x)$$

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

2. Na década de cinquenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta.

Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afectadas, o número, em **milhares**, de pessoas que estavam infectadas com a doença, t anos após o início de 1950, é dado, aproximadamente, por

$$I(t) = \frac{2 e^{kt}}{1 + p e^{kt}}$$

em que k e p são parâmetros reais.

Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

- 2.1. Admita que, para uma certa região, $k = \frac{1}{3}$ e $p = 1$

Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 1500.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 2.2. Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infectadas no início de 1951.

Qual é, para este caso, a relação entre k e p ?

Apresente a sua resposta na forma $k = -\ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

3. A Ana dispõe de nove cartas todas diferentes: cinco cartas do naipe de espadas e quatro cartas do naipe de copas.

3.1. A Ana vai dispor essas nove cartas sobre uma mesa, lado a lado, da esquerda para a direita, de modo a formar uma sequência com as nove cartas.

A Ana pretende que a primeira e a última cartas da sequência sejam ambas do naipe de espadas.

Quantas sequências diferentes, nestas condições, pode a Ana fazer?

3.2. Admita que a Ana baralha essas nove cartas e, em seguida, tira três, ao acaso.

Qual é a probabilidade de, nessas três cartas, haver pelo menos uma carta de copas?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.3. As cartas de que a Ana dispõe são:

- o ás, o rei, a dama, o valete e o sete do naipe de espadas;
- o ás, o rei, a dama e o valete do naipe de copas.

Depois de introduzir as nove cartas num saco, a Ana retira uma carta ao acaso.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «A carta retirada é um ás»

B : «A carta retirada é do naipe de copas»

Averigúe se os acontecimentos A e B são independentes.

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)

Sabe-se que:

- $P(B) = 0,4$
- $P(A|B) = 0,3$
- $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0,5$

Determine $P(B|A)$

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Uma caixa contém quatro bolas brancas e quatro bolas pretas.

Considere a experiência seguinte.

Tira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Se a bola for branca, repõe-se na caixa; se a bola for preta, deixa-se ficar fora da caixa.

Em seguida, tira-se, também ao acaso, uma segunda bola da caixa, e procede-se do mesmo modo: se a bola for branca, repõe-se na caixa; se a bola for preta, deixa-se ficar fora da caixa.

Seja X o número de bolas que, no final da experiência, estão fora da caixa.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	<hr/>
	50 pontos

GRUPO II

1.	20 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	20 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	20 pontos
3.3.	15 pontos
4.	20 pontos
5.	20 pontos
	<hr/>
	150 pontos

TOTAL

200 pontos