Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 19.01.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

$$f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{25}(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=25^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{25} \Leftrightarrow x=5$$

2. Resposta **(B)**

$P(B|A)$ significa, no contexto do problema, «probabilidade de o aluno escolhido ter 18 anos, sabendo que é do sexo masculino». Como a turma tem seis rapazes, dos quais dois têm 18 anos, a probabilidade pedida é $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

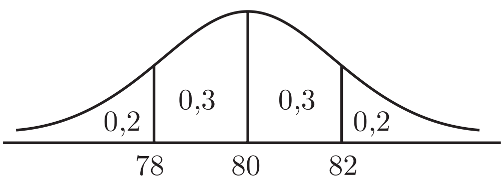
3. Resposta **(C)**

$^{n}C_{2}=45 \Leftrightarrow n=10$

Portanto, o elemento pedido é 10

4. Resposta **(C)**

Esquematicamente, tem-se:



5. Resposta **(A)**

A probabilidade de, num lançamento do dado, sair a face 4 é $\frac{1}{6}$

Portanto, a probabilidade de não sair a face 4 é $\frac{5}{6}$

Numa série de quinze lançamentos, tem-se:

- $\left(\frac{5}{6}\right)^{15}$ é a probabilidade de nunca sair a face 4;

- ${}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}$ é a probabilidade de a face 4 sair uma única vez.

Assim, $\left(\frac{5}{6}\right)^{15} + {}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}$ é a probabilidade de, numa série de quinze lançamentos, a face 4 sair no máximo uma vez.

Portanto, $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}$ é a probabilidade de a face 4 sair pelo menos duas vezes.

GRUPO II

1. Comecemos por observar que, em $\mathbb{R}$, apenas os números positivos têm logaritmo.

Portanto, para que a expressão $\log_4(12x+8) \geq 2 + \log_4(x)$ tenha significado, em $\mathbb{R}$, é necessário que $12x + 8 > 0 \;\wedge\; x > 0$

$$12x + 8 > 0 \;\wedge\; x > 0 \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{2}{3} \;\wedge\; x > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0$$

Para $x > 0$, tem-se:

$$\log_4(12x+8) \geq 2 + \log_4(x) \Leftrightarrow \log_4(12x+8) \geq \log_4(16) + \log_4(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4(12x+8) \geq \log_4(16x) \Leftrightarrow 12x + 8 \geq 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 2$$

O conjunto solução da inequação é, portanto, o conjunto dos números reais que satisfazem a condição $x > 0 \;\wedge\; x \leq 2$

Portanto, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é $]0,\ 2]$

2.1. Como 1500 são $1{,}5$ milhares, o problema pode traduzir-se pela equação $I(t) = 1{,}5$

Para $k = \frac{1}{3}$ e $p = 1$, tem-se:

$$I(t) = 1{,}5 \Leftrightarrow \frac{2e^{\frac{t}{3}}}{1 + e^{\frac{t}{3}}} = 1{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{\frac{t}{3}} = 1{,}5\left(1 + e^{\frac{t}{3}}\right) \Leftrightarrow 2e^{\frac{t}{3}} = 1{,}5 + 1{,}5e^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{\frac{t}{3}} - 1{,}5e^{\frac{t}{3}} = 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5e^{\frac{t}{3}} = 1{,}5 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{3}} = \frac{1{,}5}{0{,}5} \Leftrightarrow e^{\frac{t}{3}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{3} = \ln(3) \Leftrightarrow t = 3\ln(3) \Leftrightarrow t = \ln(27)$$

Portanto, $t \approx 3{,}296$

Assim, foi em 1953 que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 1500.

2.2. Como o início de 1951 corresponde a $t = 1$, tem-se $I(1) = 1$

$$I(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2e^k}{1 + pe^k} = 1 \Leftrightarrow 2e^k = 1 + pe^k \Leftrightarrow 2e^k - pe^k = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^k(2 - p) = 1 \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2 - p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2 - p}\right) \Leftrightarrow k = \ln(2 - p)^{-1} \Leftrightarrow k = -\ln(2 - p)$$

3.1. ${}^5A_2 \times 7! = 100\ 800$

3.2. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

$$1 - \frac{{}^5C_3}{{}^9C_3} = \frac{37}{42}$$

2.º Processo

$$\frac{{}^4C_1 \times {}^5C_2 + {}^4C_2 \times {}^5C_1 + {}^4C_3}{{}^9C_3} = \frac{37}{42}$$

3.3. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Tem-se: $P(A) = \dfrac{2}{9}$ e $P(B) = \dfrac{4}{9}$

Logo, $P(A) \times P(B) = \dfrac{8}{81}$

Por outro lado, o acontecimento $A \cap B$ é o acontecimento «A carta retirada é o ás de copas».

Portanto, $P\left(A \cap B\right) = \dfrac{1}{9}$

Como $P\left(A \cap B\right) \neq P(A) \times P(B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

2.º Processo

Tem-se: $P(A) = \dfrac{2}{9}$

$P\left(A \middle| B\right) = \dfrac{1}{4}$ pois, das quatro cartas de copas existentes, apenas uma é ás.

Como $P\left(A \middle| B\right) \neq P(A)$, conclui-se que os acontecimentos A e B não são independentes.

4. Dos vários processos de resolução deste item, apresentam-se dois.

1.º Processo

Tem-se:

$P\left(A \cap B\right) = P(B) \times P(A|B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P(\overline{B}) \times P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$

Como $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$, conclui-se que $1 - P\left(A \cup B\right) = 0{,}3$

Assim, $P\left(A \cup B\right) = 0{,}7$

Por outro lado, tem-se $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right)$ e, portanto:

$0{,}7 = P(A) + 0{,}4 - 0{,}12 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}42$

Então, $P\left(B \middle| A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}42} = \dfrac{2}{7}$

2.º Processo

Com vista ao preenchimento de uma tabela, tem-se:

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P\left(A \cap B\right) = P(B) \times P(A|B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P(\overline{B}) \times P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$

	A	$\overline{A}$	
B	$0{,}12$		
$\overline{B}$		$0{,}3$	$0{,}6$
			1

Da observação dos valores registados na tabela decorre que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

Acrescentando este valor à tabela, torna-se evidente que $P(A) = 0{,}12 + 0{,}3 = 0{,}42$

Portanto, vem, na tabela:

	A	$\overline{A}$	
B	$0{,}12$		
$\overline{B}$	$0{,}3$	$0{,}3$	$0{,}6$
	$0{,}42$		1

Então, $P\left(B \middle| A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}42} = \dfrac{2}{7}$

5. A variável X pode tomar os valores 0, 1 e 2

- A variável toma o valor 0 se e só se as bolas retiradas forem ambas brancas.
- A variável toma o valor 1 se e só se a primeira bola retirada for branca e a segunda for preta, ou a primeira bola retirada for preta e a segunda for branca.
- A variável toma o valor 2 se e só se as bolas retiradas forem ambas pretas.

Como as bolas brancas são repostas depois de retiradas, a probabilidade de as bolas retiradas serem ambas brancas é igual a $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$

Portanto, $P\left(X = 0\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

A probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda bola ser preta é igual a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ e, como as bolas pretas não são repostas depois de retiradas, a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda bola ser branca é igual a $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$

Portanto, $P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{15}{28}$

Como as bolas pretas não são repostas depois de retiradas, a probabilidade de as bolas retiradas serem ambas pretas é igual a $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$

Portanto, $P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é, portanto,

x_{i}	0	1	2
$P(X = x_{\mathrm{i}})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$