Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 06.05.2011

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

A distância da cadeira 1 ao solo é sempre superior a zero. Tal permite excluir a opção **C**.

A distância da cadeira 1 ao solo começa por aumentar com o decorrer do tempo até atingir o máximo, o que permite excluir a opção **A**.

A opção **D** deve ser excluída pois, de acordo com o gráfico apresentado nesta opção, ao fim de um minuto a roda não teria completado uma volta.

2. Resposta **(D)**

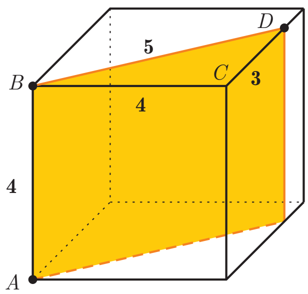
Às 14 horas desse dia, a altura, em metros, da água na piscina era $h(5) = 0{,}3 \times 5 = 1{,}5$

Portanto, o volume, em m^3, de água na piscina era igual a $10 \times 6 \times 1{,}5 = 90$

Logo, às 14 horas desse dia, havia $90\,000$ litros de água na piscina.

3. Resposta **(C)**

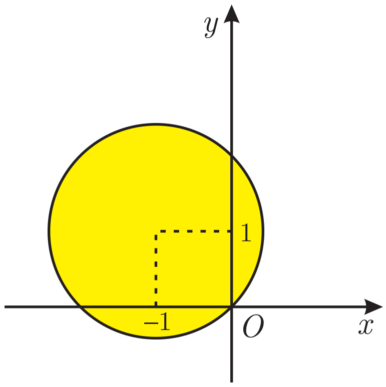
A secção produzida no cubo pelo plano ABD é o rectângulo representado na figura.



O valor da área deste rectângulo é $4 \times \sqrt{4^2 + 3^2} = 4 \times 5 = 20$

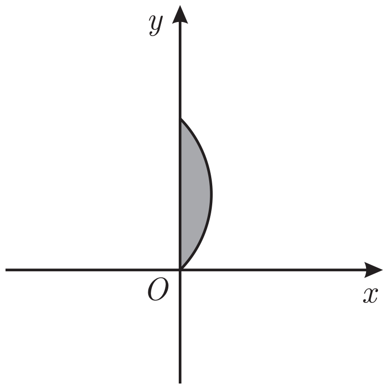
4. Resposta **(C)**

A condição $(x+1)^2+(y-1)^2 \leq 2$ define o círculo de centro no ponto $(-1,1)$ e raio $\sqrt{2}$



A condição $x \geq 0$ define o conjunto dos pontos de abcissa não negativa.

Na figura seguinte, apresenta-se, em referencial o.n. xOy, a intersecção das regiões definidas pelas condições $(x+1)^2+(y-1)^2 \leq 2$ e $x \geq 0$



5. Resposta **(D)**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Os triângulos $[IGK]$ e $[BCK]$ são semelhantes, sendo $\overline{GK} = \frac{1}{2}\,\overline{CK}$

Logo, $\overline{IG} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$, pelo que o ponto I é o ponto médio do segmento $[GF]$

De igual modo se conclui que o ponto J é o ponto médio do segmento $[GH]$

Portanto, o volume da pirâmide $[GIJK]$ é igual a $\frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 6 = \frac{54}{6} = 9$

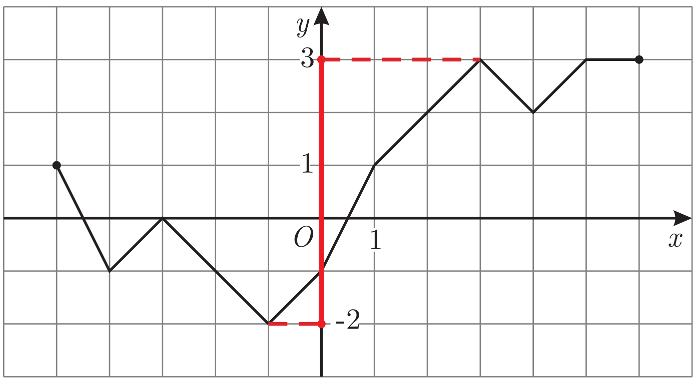
2.º Processo

Para calcular o volume da pirâmide $[GIJK]$, pode ter-se em conta que esta pirâmide é uma redução de razão $\frac{1}{2}$ da pirâmide $[CBDK]$, pelo que o seu volume é $\frac{1}{8}$ do volume desta última pirâmide.

Portanto, como o volume da pirâmide $[CBDK]$ é igual a $\frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 12 = 72$, o volume da pirâmide $[GIJK]$ é igual a $\frac{1}{8} \times 72 = 9$

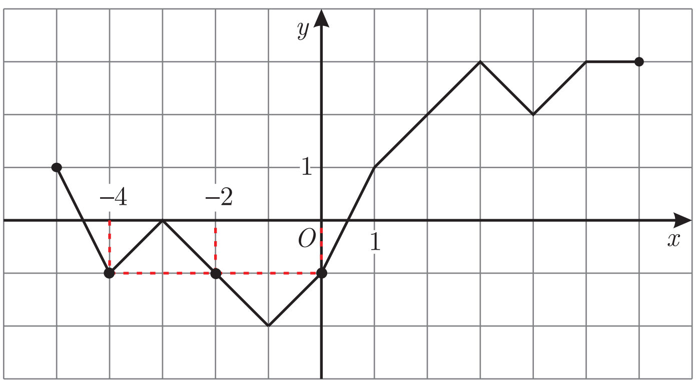
GRUPO II

1.1. Na figura, está representado o gráfico da função f



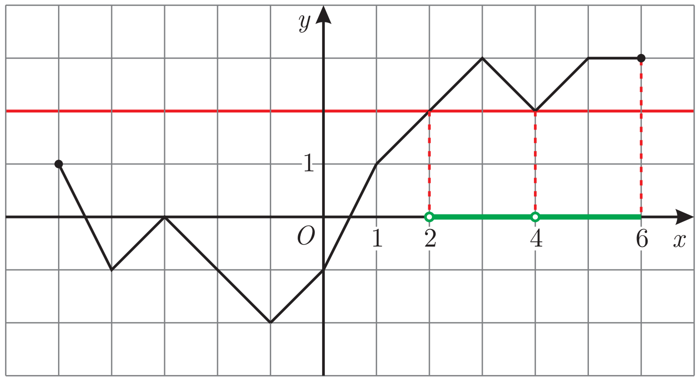
Como se pode observar, o contradomínio (conjunto das imagens) da função f é o conjunto $[-2,3]$

1.2. Na figura, está representado o gráfico da função f e estão assinalados os pontos do gráfico que têm ordenada -1. As abcissas desses pontos são os números -4, -2 e 0



Portanto, os números reais cujas imagens, por meio de f, são iguais a -1, são -4, -2 e 0

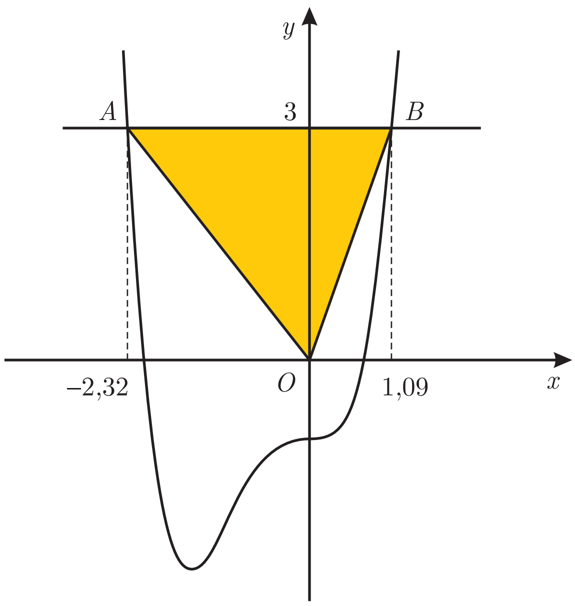
1.3. Na figura, está representado o gráfico da função f , bem como a recta de equação $y = 2$



Da análise do gráfico, conclui-se que o conjunto solução da condição $f(x) > 2$ é $]2,4[\cup]4,6]$

2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, e escolhendo uma janela conveniente, podemos visualizar os pontos A e B, pontos de intersecção do gráfico de g com a recta de equação $y = 3$. Utilizando, por exemplo, a ferramenta de intersecção da calculadora, podemos obter a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B

Na figura seguinte, está reproduzida a parte do gráfico da função g visualizada na calculadora, está representado o triângulo $[AOB]$ e estão indicadas as abcissas dos pontos A e B, arredondadas às centésimas.



A área do triângulo $[AOB]$ é igual a $\dfrac{\overline{AB} \times 3}{2}$

Tem-se $\dfrac{\overline{AB} \times 3}{2} \approx \dfrac{(1,09 + 2,32) \times 3}{2} = 5,115$

Portanto, a área do triângulo $[AOB]$, arredondada às décimas, é igual a $5,1$

3.1. O comprimento do lado do rectângulo contido no eixo Ox é dado, em função de x, por $6 - x$

O ponto P tem abcissa x e, como este ponto pertence à recta de equação $y = 2x - 2$, a sua ordenada é $2x - 2$

Portanto, a área do rectângulo é dada, em função de x, por

$S(x) = (6 - x)(2x - 2) = 12x - 12 - 2x^2 + 2x = -2x^2 + 14x - 12$

3.2. Uma condição que traduz o problema é $-2x^2 + 14x - 12 < 8 \ \wedge \ x \in \left]1, 6\right[$

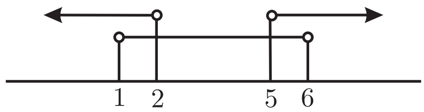
Tem-se: $-2x^2 + 14x - 12 < 8 \iff -2x^2 + 14x - 20 < 0$

Ora, $-2x^2 + 14x - 20 = 0 \iff x = 2 \ \vee \ x = 5$

Portanto, $-2x^2 + 14x - 20 < 0 \iff x < 2 \ \vee \ x > 5$

Como $x \in \left]1, 6\right[$, o conjunto solução da condição que traduz o problema é

$\left(\left]-\infty, 2\right[\cup \left]5, +\infty\right[\right) \cap \left]1, 6\right[$



Portanto, o conjunto dos valores de x para os quais a área do rectângulo é inferior a 8 é $\left]1, 2\right[\cup \left]5, 6\right[$

4.1. Tem-se $H = G + \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (11, -1, 2) - (8, 5, 0) = (3, -6, 2)$

Portanto, $H = G + \overrightarrow{BA} = (6, 9, 15) + (3, -6, 2) = (9, 3, 17)$

4.2. O raio da superfície esférica é a distância do ponto A ao ponto B

$r = \overline{BA} = \| \overrightarrow{BA} \| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

Uma equação da superfície esférica é, portanto, $(x - 11)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 49$

4.3. A recta que passa no ponto $G(6, 9, 15)$ e é paralela ao eixo Oy pode ser definida pela condição $x = 6 \wedge z = 15$ ou pela condição $(x, y, z) = (6, 9, 15) + k(0, 1, 0), \ k \in \mathbb{R}$

5. Designando por a a altura de um dos cones, a altura do outro cone é $h - a$

Designemos por C_1 o cone de altura a e por C_2 o cone de altura $h - a$

Tem-se:

Volume do cone $C_1 = \frac{\pi r^2 a}{3}$

Volume do cone $C_2 = \frac{\pi r^2 (h-a)}{3}$

A soma dos volumes dos dois cones é igual a

$$\frac{\pi r^2 a}{3} + \frac{\pi r^2 (h-a)}{3} = \frac{\pi r^2 a + \pi r^2 (h-a)}{3} = \frac{\pi r^2 a + \pi r^2 h - \pi r^2 a}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Portanto, a soma dos volumes dos dois cones não depende de a, pelo que não depende da posição do ponto P