Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 26.05.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(A)**

Tem-se: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+a=1 \Longleftrightarrow a=\frac{1}{3}$

2. Resposta **(A)**

O número de casos favoráveis é ${}^{15}C_2$ (número de maneiras de escolher duas bolas de entre 15).

O número de casos possíveis é 3 $\left(\{1,6\},\{2,5\}\right.$ e $\left.\{3,4\}\right)$

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{3}{{}^{15}C_2}=\frac{1}{35}$

3. Resposta **(C)**

Na opção C, tem-se:

$g(-4)=(-4)^2-f(-4)=16-9=7$

$g(1)=1^2-f(1)=1-3=-2$

Como $g(-4)$ e $g(1)$ têm sinais contrários, e como g é contínua no intervalo $[-4,1]$, o teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero de g no intervalo $]-4,1[$

Em cada uma das restantes opções, $g(-4)$ e $g(1)$ têm o mesmo sinal.

4. Resposta **(B)**

Da observação do gráfico, conclui-se que a função f é estritamente decrescente. Portanto, f' é sempre negativa.

Como o gráfico tem a concavidade voltada para cima, conclui-se que f'' é sempre positiva.

5. Resposta **(D)**

Seja z o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto B

Como os pontos A e B estão igualmente distanciados da origem do referencial, tem-se

$|z| = |6+8i| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

Como o arco BC tem $\frac{\pi}{9}$ de amplitude , tem-se que um argumento de z é $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{25\pi}{18}$

Portanto, $z = 10\operatorname{cis}\frac{25\pi}{18}$

GRUPO II

1. Como 1 é um zero do polinómio $z^3 - z^2 + 9z - 9$, este polinómio é divisível por $z-1$

Efectuando a divisão do polinómio $z^3 - z^2 + 9z - 9$ por $z-1$, utilizando a regra de Ruffini, tem-se:

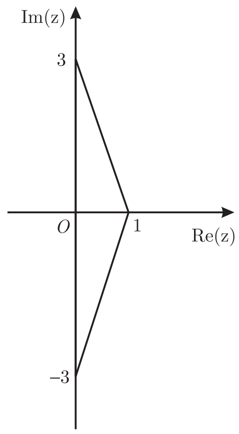
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 9 & -9 \\ 1 & & 1 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

Portanto,

$z^3 - z^2 + 9z - 9 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)(z^2+9) = 0 \Longleftrightarrow z-1=0 \ \vee \ z^2+9=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow z=1 \ \vee \ z=3i \ \vee \ z=-3i$

Na figura, está representado o triângulo cujos vértices são as imagens geométricas dos números complexos 1, $3i$ e $-3i$



O perímetro deste triângulo é igual a $6+2\sqrt{10}$

2.1. Tem-se:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{e\,x-e}\right) = 3+\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{e(x-1)} = 3+\frac{1}{e}\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$$

Seja $y = x-1$. Como $x \to 1^-$, $y \to 0^-$

Tem-se:

$$3+\frac{1}{e}\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = 3+\frac{1}{e}\lim_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 3+\frac{1}{e}\times 1 = 3+\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x\,e^{-x}+3x\right) = e^{-1}+3 = \frac{1}{e}+3$$

$$f(1) = \frac{1}{e}+3$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Podemos então concluir que a função f é contínua em $x=1$

2.2. Seja m o declive da assimptota, e seja b a sua ordenada na origem.

Tem-se:

$$m = \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x\,e^{-x}+3x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(e^{-x}+3\right) = 0+3 = 3$$

$$b = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-3x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(x\,e^{-x}+3x-3x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(x\,e^{-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a equação reduzida da assimptota oblíqua do gráfico da função f é $y=3x$

2.3. Em $[1,+\infty[$, tem-se $\dfrac{f(x)}{x} = e^{-x}+3$

$$e^{-x}+3 = e^x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}+3 = e^x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2+6e^x = 2\left(e^x\right)^2+3e^x \Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2-3e^x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{3\pm\sqrt{9-4\times 2\times(-2)}}{4} \Leftrightarrow e^x = \frac{3\pm 5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \ \vee\ \underbrace{e^x = -\frac{1}{2}}_{\text{Equação impossível}} \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Como $\ln 2 < 1$, conclui-se que a equação é impossível em $[1,+\infty[$

3.1. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{1+d}$$

Portanto, $f(x) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\dfrac{1}{1+d}}{\dfrac{1}{1+d}} = \left(1-\dfrac{1}{1+d}\right)\times(1+d) = 1+d-1 = d$

2.º Processo

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{1+d}$$

Tem-se

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{1+d} \Leftrightarrow (1+d)\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + d\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow d = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow d = f(x)$$

3.2. $f'(x) = \left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \dfrac{(1-\operatorname{sen} x)'\operatorname{sen} x - (1-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{-\cos x \operatorname{sen} x - (1-\operatorname{sen} x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$$= \frac{-\cos x \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Para qualquer $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos x > 0$, logo $f'(x) < 0$, pelo que a função f é decrescente.

Assim, quanto maior é o valor de x, menor é o valor de d

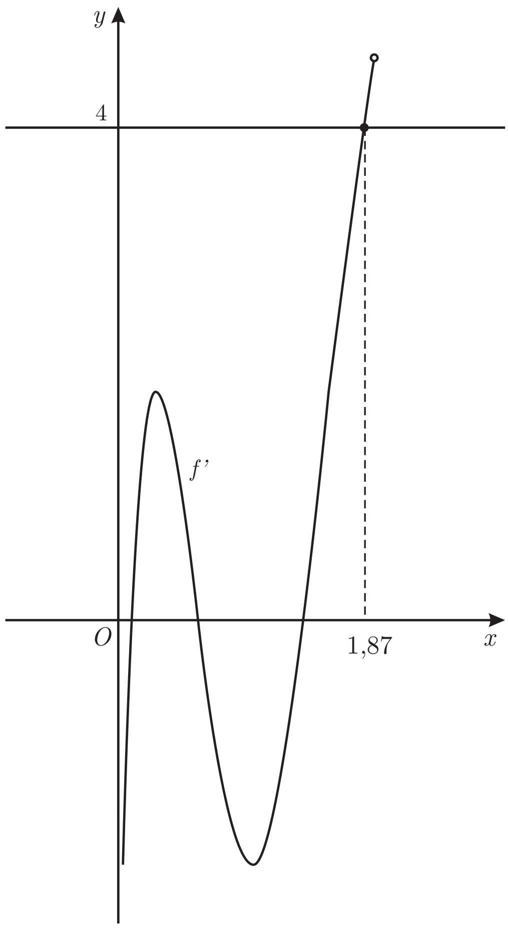
Portanto, a afirmação é verdadeira.

4. Designando por x a abcissa do ponto A, o declive da recta tangente ao gráfico da função f, no ponto A, é igual a $f'(x)$

Trata-se, assim, de encontrar o valor de x tal que $f'(x) = 4$

$$f'(x) = 4 \Leftrightarrow \left(x \ln x + \operatorname{sen}(3x)\right)' = 4 \Leftrightarrow \ln x + 1 + 3\cos(3x) = 4$$

Na figura, estão representados o gráfico da função f' e a recta de equação $y = 4$, bem como o ponto de intersecção destas duas linhas. Também se indica a abcissa deste ponto, arredondada às centésimas.



Portanto, a abcissa do ponto A, arredondada às centésimas, é $1{,}87$

5. Tem-se:

$$P(A \cup B) < P(B \mid A) \times P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(B \mid A) \times (1 - P(A)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(B \mid A) - P(B \mid A) \times P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(B \mid A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) < P(B \mid A)$$