GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Teste Intermédio de Matemática A

Versão 2

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2012

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

Tem-se: $a = b^{\pi} \Leftrightarrow \log_b a = \pi$

$$\log_b\left(a^{100} \times b^{14}\right) = \log_b\left(a^{100}\right) + \log_b\left(b^{14}\right) = 100 \log_b a + 14 = 100\pi + 14 \approx 328$$

2. Resposta **(B)**

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$, tem-se $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{g(x)} = 0$. Tal permite excluir as opções A e D.

Como a bissetriz dos quadrantes ímpares é assíntota do gráfico de g, tem-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{g(x)} = 0$. Tal permite excluir a opção C.

3. Resposta **(D)**

Das informações dadas no enunciado, podemos concluir, por aplicação do teorema de Bolzano, que a função $f - g$ tem pelo menos um zero em $]1, 3[$. Portanto, $\exists c \in]1, 3[: \ f(c) - g(c) = 0$, ou seja, $\exists c \in]1, 3[: \ f(c) = g(c)$, pelo que os gráficos das funções f e g se intersectam em pelo menos um ponto.

4. Resposta **(B)**

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

5. Resposta **(A)**

Tem-se $|z| = \overline{OQ}$

Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{OQ}^{\,2} = \left(\frac{\overline{OQ}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OQ}^{\,2} = \frac{\overline{OQ}^{\,2}}{4} + 3 \Leftrightarrow 4\,\overline{OQ}^{\,2} = \overline{OQ}^{\,2} + 12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \overline{OQ}^{\,2} = 4 \Leftrightarrow \overline{OQ} = 2$ Portanto, $|z| = 2$

Como o triângulo $[OPQ]$ é equilátero, tem-se $Q\hat{O}P = \frac{\pi}{3}$

Portanto, um argumento de z é $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

GRUPO II

1. $$\frac{\left(\sqrt{2}\,i\right)^3 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{x+i} = \frac{2\sqrt{2}\,i^3 \times \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}{x+i} = \frac{-2\sqrt{2}\,i \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{x+i} =$$

$$= \frac{-2i-2i^2}{x+i} = \frac{2-2i}{x+i} = \frac{(2-2i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{2x-2i-2xi+2i^2}{x^2+1} = \frac{2x-2+(-2-2x)i}{x^2+1} =$$

$$= \frac{2x-2}{x^2+1} + \frac{-2-2x}{x^2+1}i$$

Para esta expressão designar um número real, $\frac{-2-2x}{x^2+1}$ tem de ser igual a zero, pelo que $x = -1$

2.1. Seja X o número de vezes que, nas cinco realizações da experiência, sai bola preta.

Tem-se que X é uma variável aleatória com distribuição binomial.

A probabilidade de sair bola preta, em cada realização da experiência, é $\frac{1}{4}$

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = {}^5C_4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + {}^5C_5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 =$$

$$= 5 \times \frac{1}{256} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{1024} = \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{16}{1024} = \frac{1}{64}$$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(\overline{B} \mid A)$ é a probabilidade de as bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor.

Dado que as bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor, elas são necessariamente brancas, pelo que a caixa 2 fica com quatro bolas brancas e três bolas pretas, num total de sete bolas.

Retiramos então duas bolas dessas sete, e queremos determinar a probabilidade de elas serem de cores diferentes, ou seja, de uma ser branca e a outra ser preta.

Existem ${}^7C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas, de entre sete. Por isso, o número de casos possíveis é ${}^7C_2$

Existem 4×3 maneiras diferentes de tirar simultaneamente uma bola branca e uma bola preta. Por isso, o número de casos favoráveis é 4×3

Assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{4 \times 3}{{}^7C_2} = \dfrac{4}{7}$

3.1. Tem-se $\operatorname{sen} x = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$, pelo que $\overline{AB} = 2 \operatorname{sen} x$

Tem-se $\cos x = \dfrac{\overline{QB}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{QB}}{2}$, pelo que $\overline{QB} = 2 \cos x$

Portanto,

$$S(x) = \frac{\overline{PB} \times \overline{AB}}{2} = \frac{(2 + 2\cos x) \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = (2 + 2\cos x) \times \operatorname{sen} x =$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \,\cos x = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$$

3.2. $S'(x) = \left[2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)\right]' = 2\cos x + 2\cos(2x)$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x)$

Em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \ \vee \ x = -(\pi - 2x) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \ \vee \ -x = -\pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee \ x = \pi - 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, a equação $S'(x) = 0$ tem apenas uma solução: $\dfrac{\pi}{3}$

Tem-se, então, o seguinte quadro:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
S'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
S	n.d.	↗	Máx.	↘	n.d.

Portanto, existe um valor de x, $\dfrac{\pi}{3}$, para o qual a área do triângulo $[PAB]$ é máxima.

4.1. O declive da reta r é $f'(3)$

O declive da reta s é $f'(b)$

Como as retas r e s são paralelas, tem-se $f'(b) = f'(3)$

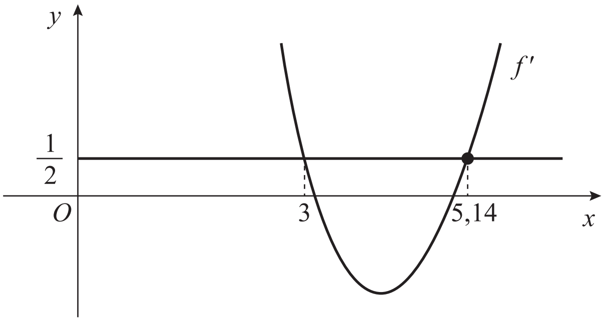
Portanto, uma equação que traduz o problema é $f'(x) = f'(3)$

Tem-se $f'(3) = 3^2 - 6 \times 3 + \frac{19}{2} - 4\ln 1 = 9 - 18 + \frac{19}{2} = \frac{1}{2}$

Portanto, $f'(x) = f'(3) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$

Temos, portanto, de resolver a equação $f'(x) = \frac{1}{2}$

Recorrendo à calculadora, podemos visualizar o gráfico de f' e a reta de equação $y = \frac{1}{2}$



Como era de esperar, 3 é uma das soluções da equação $f'(x) = \frac{1}{2}$

A outra solução é b

Portanto, $b \approx 5{,}14$

4.2. Tem-se $f''(x) = \left[x^2 - 6x + \frac{19}{2} - 4\ln(x-2)\right]' = 2x - 6 - \frac{4}{x-2}$

Como $x \in \left]2, +\infty\right[$, tem-se:

$$2x - 6 - \frac{4}{x-2} = 0 \underset{\text{pois } x-2\neq 0}{\Leftrightarrow} (2x-6)(x-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 4x + 12 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \underset{\text{pois } x\neq 1}{\Leftrightarrow} x = 4$$

Como o único zero da segunda derivada é 4, é esta a abcissa do ponto de inflexão.

5. A função f é contínua em $x=3$ se existir $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ e se esse limite for igual a $f(3)$

Tem-se:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{xe^x - 3e^3}{x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ $\quad \boxed{y = x-3}$

$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{(y+3)\,e^{y+3} - 3e^3}{y} = \lim_{y \to 0^-} \frac{ye^{y+3} + 3e^{y+3} - 3e^3}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{ye^{y+3} + 3e^3(e^y - 1)}{y} = \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{ye^{y+3}}{y} + \frac{3e^3(e^y-1)}{y} \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} e^{y+3} + 3e^3 \times \lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = e^3 + 3e^3 \times 1 = 4e^3$$

- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \left[4e^x + \ln(x-2)\right] = 4e^3 + \ln 1 = 4e^3$

- $f(3) = 4e^3$

Portanto, f é contínua em $x=3$