GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Teste Intermédio de Matemática A
Versão 1

Teste Intermédio

# Matemática A

**Versão 1**

Duração do Teste: 90 minutos | 16.03.2012

**10.º Ano de Escolaridade**

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

## RESOLUÇÃO

## GRUPO I

**1.** Resposta **(B)**

As opções **(A)**, **(C)** e **(D)** devem ser excluídas, pois os pontos $(1, 1, 2)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$ não pertencem a qualquer aresta do cubo porque o ponto $(1, 1, 2)$ é o centro da face $[STUV]$, o ponto $(0, 1, 1)$ é o centro da face $[ORST]$ e o ponto $(1, 1, 1)$ é o centro do cubo.

A opção correta é a **(B)**, porque o ponto $(1, 2, 0)$ é o ponto médio da aresta $[QR]$

**2.** Resposta **(C)**

A reta $t$ passa no ponto $(-1, 2, 3)$ e é paralela ao eixo $Oy$

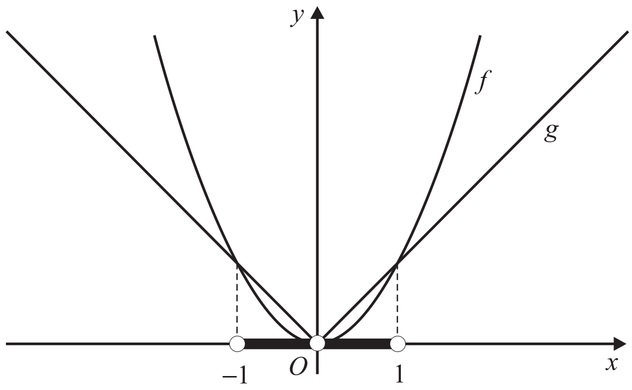
A opção **(A)** deve ser rejeitada, pois define uma reta paralela ao eixo $Oz$

A opção **(B)** deve ser rejeitada, pois define uma reta paralela ao eixo $Ox$

A opção **(D)** deve ser rejeitada, pois define o eixo $Oy$, que não passa no ponto $(-1, 2, 3)$

**3.** Resposta **(A)**

Na figura, estão representadas as funções $f$ e $g$




Como se pode observar, $f(x) < g(x) \;\Leftrightarrow\; x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$

**4.** Resposta **(D)**

As duas semirretas cuja união é o gráfico da função $h$ têm origem no ponto de abcissa $-1$ e não no ponto de abcissa $0$. Tal facto permite excluir as opções **(A)** e **(B)**.

Na opção **(C)**, a imagem de $0$ é $-1$. Tal facto permite excluir esta opção, pois, de acordo com o gráfico, $h(0) = 1$

**5.** Resposta **(A)**

Na opção **(B)**, só a segunda afirmação é verdadeira. Nas opções **(C)** e **(D)**, apenas a terceira afirmação é verdadeira.

## GRUPO II

**1.1.** Como a reta $r$ tem declive $2$ e ordenada na origem $-1$, as coordenadas de um vetor diretor da reta $r$ são $(1, 2)$ e as coordenadas de um ponto da reta são $(0, -1)$

Portanto, uma equação vetorial da reta $r$ é: $(x, y) = (0, -1) + k(1, 2),\; k \in \mathbb{R}$

**1.2.** Seja $s$ a reta paralela à reta $r$ que passa no ponto $A$. A reta $s$ tem declive $2$, pois é paralela à reta $r$, e tem ordenada na origem $-2$, pois passa no ponto $A$

Portanto, a equação reduzida da reta $s$ é: $y = 2x - 2$

**1.3.** A região representada a sombreado é limitada pela circunferência que tem centro no ponto $A(0, -2)$ e raio $2$, pelo eixo $Oy$ e pela reta $r$

Uma condição que define esta região, incluindo a sua fronteira, é:
$x^2 + (y+2)^2 \leq 4 \;\wedge\; x \geq 0 \;\wedge\; y \leq 2x - 1$

**2.1.** Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Como $\overline{AD} = 3\,\mathrm{dm}$ e $\overline{ED} = 2\overline{AE}$, conclui-se que $\overline{AE} = 1\,\mathrm{dm}$ e $\overline{ED} = 2\,\mathrm{dm}$

A área do quadrado $[ABCD]$ é $9\,\mathrm{dm}^2$ e a área dos quatro triângulos é $4\times\frac{2\times 1}{2} = 4\,(\mathrm{dm}^2)$

Portanto, a área do quadrado $[EFGH]$ é $5\,\mathrm{dm}^2$

**2.º Processo**

Como $\overline{AD} = 3\,\mathrm{dm}$ e $\overline{ED} = 2\overline{AE}$, conclui-se que $\overline{AE} = 1\,\mathrm{dm}$ e $\overline{ED} = 2\,\mathrm{dm}$

O triângulo $[EDH]$ é retângulo, pelo que $\overline{EH}^{\,2} = \overline{DH}^{\,2} + \overline{ED}^{\,2}$

Como $\overline{DH} = \overline{AE} = 1\,\mathrm{dm}$ e $\overline{ED} = 2\,\mathrm{dm},\ \overline{EH}^{\,2} = 1 + 4 \Leftrightarrow \overline{EH} = \sqrt{5}\ (\mathrm{dm})$

Portanto, a área do quadrado $[EFGH]$ é $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5(\mathrm{dm}^2)$

**2.2.** As pirâmides de vértice $V$ e bases $[EFGH]$ e $[IJKL]$ são semelhantes.

Como a área do quadrado $[EFGH]$ é $5\,\mathrm{dm}^2$ e a área do quadrado $[IJKL]$ é $45\,\mathrm{dm}^2$, e como $\frac{5}{45} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$, concluímos que a pirâmide $[EFGHV]$ é uma redução de razão $\frac{1}{3}$ da pirâmide $[IJKLV]$. Logo, a altura da pirâmide $[EFGHV]$ é $\frac{1}{3}$ da altura da pirâmide $[IJKLV]$, ou seja, $4\,\mathrm{dm}$

Assim, $d = 12 - 4 = 8$

Portanto, a distância, $d$, entre a peça metálica e a base da pirâmide é $8\,\mathrm{dm}$

**3.1.** Tem-se $D'_f = [-1, +\infty[$

Portanto, $D'_g = \,]-\infty, 1]$, $D'_h = [2, +\infty[$ e $D'_j = [-1, +\infty[$

**3.2.** Como o gráfico da função $f$ é uma parábola de vértice no ponto $(2, -1)$, tem-se $h = 2$ e $k = -1$
Tem-se, então, $f(x) = a(x-2)^2 - 1$, sendo $a$ um número real.

Como o ponto $(0, 1)$ pertence ao gráfico da função $f$, tem-se

$1 = a(0-2)^2 - 1 \Leftrightarrow 1 = 4a - 1 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Assim, $h = 2$, $k = -1$ e $a = \frac{1}{2}$

**4.1.** Para $x \in \,]-1, 4[$, o quadrilátero $[ABPQ]$ é um trapézio de base maior $\overline{AB}$, base menor $\overline{QP}$ e altura $\overline{QA}$

Tem-se: $-2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Portanto, $\overline{AB} = 4 + 1 = 5$

O ponto $P$ tem abcissa $x$, logo, $\overline{QP} = \left|x - (-1)\right| = |x+1| = x + 1$ (para $x > -1$, tem-se $x + 1 > 0$)

O ponto $P$ tem ordenada $-2x + 8$ e, como a ordenada do ponto $Q$ é igual à ordenada do ponto $P$, tem-se $\overline{QA} = -2x + 8$

Assim, a área do trapézio $[ABPQ]$ é dada, em função de $x$, por

$$S(x)=\frac{5+x+1}{2}\times(-2x+8)=\frac{-12x+48-2x^2+8x}{2}=\frac{-2x^2-4x+48}{2}=-x^2-2x+24$$

**4.2.** Uma condição que traduz o problema é:

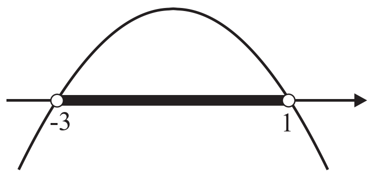
$-x^2-2x+24>21 \ \wedge \ x\in\,]-1,4[$

Tem-se:

$-x^2-2x+24 > 21 \Leftrightarrow -x^2-2x+24-21 > 0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3 > 0$

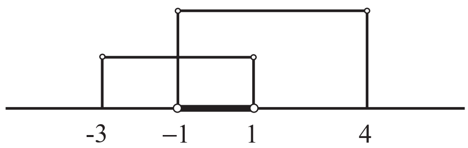
Como $-x^2-2x+3 = 0 \Leftrightarrow x=-3 \ \vee \ x=1$, vem

$-x^2-2x+3>0 \Leftrightarrow -3<x<1$




Então,

$-x^2-2x+24>21 \ \wedge \ x\in\,]-1,4[ \ \Leftrightarrow \ x\in\,]-3,1[\,\cap\,]-1,4[$




Portanto, o conjunto dos valores de $x$ para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a $21$ é $]-1,1[$