Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 13.03.2012

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

Sendo A e B dois acontecimentos incompatíveis, tem-se $P(A \cap B) = 0$

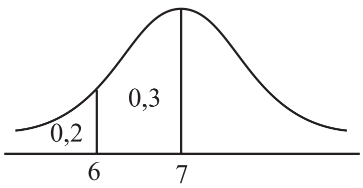
2. Resposta **(A)**

Tem-se $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$P(A) = P(X < 7) = 0{,}5$

$P(B \cap A) = P(6 < X < 7) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

Portanto, $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = \dfrac{3}{5}$



3. Resposta **(B)**

$\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(e) = 2$

Só se tem $f(e) = 2$ na opção **(B)**.

4. Resposta **(D)**

A função g é contínua no ponto 0 se e só se $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3 \times \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x}-1}{3x}$$

Seja $y = 3x$. Como $x \to 0^-$, tem-se $y \to 0^-$

Assim, $3 \times \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{3x}-1}{3x} = 3 \times \lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y} = 3 \times 1 = 3$

Portanto, $g(0)$ tem de ser igual a 3, pelo que $\alpha = 3$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\beta + \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \beta + \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \beta + 1$$

Portanto $\beta + 1$ tem de ser igual a 3, pelo que $\beta = 2$

Assim, $\alpha = 3$ e $\beta = 2$

5. Resposta **(B)**

Quando $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto O, pelo que $f(0) = \overline{OA}$. Quando x tende para $+\infty$, a reta AP tende a coincidir com a reta AB, pelo que a intersecção da reta AP com o quadrado tende a coincidir com o segmento de reta $[AB]$

Assim, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \overline{AB} = \overline{OA} = f(0)$

Como $f(0) \neq 0$ (pois $\overline{OA} \neq 0$) e como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$, a opção correta é a opção **(B)**.

GRUPO II

1.1. Existem $14!$ maneiras diferentes de os 14 rapazes ficarem em pé na fila de trás.

A delegada e a subdelegada podem ocupar as extremidades da fila da frente de 2 maneiras diferentes. Para cada uma destas maneiras, as restantes 8 raparigas podem dispor-se de $8!$ maneiras diferentes. Portanto, o número de maneiras diferentes de dispor as raparigas, de modo que a delegada fique numa das extremidades e a subdelegada na outra extremidade, é $2 \times 8!$

Então, os 24 jovens podem dispor-se de $14! \times 8! \times 2$ maneiras diferentes.

1.2. A variável aleatória X pode tomar o valor 0 (se a comissão for constituída só por rapazes), o valor 1 (se a comissão for constituída por uma rapariga e um rapaz) e o valor 2 (se a comissão for constituída só por raparigas).

Tem-se então que:

$$P(X=0)=\frac{^{14}C_2}{^{24}C_2}=\frac{91}{276} \qquad P(X=1)=\frac{14\times 10}{^{24}C_2}=\frac{35}{69}$$

$$P(X=2)=\frac{^{10}C_2}{^{24}C_2}=\frac{15}{92}$$

Tem-se, portanto, a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável X

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{91}{276}$	$\frac{35}{69}$	$\frac{15}{92}$

2.1. Em $\mathbb{R}$, apenas os números positivos têm logaritmo.

Portanto, para que a expressão $3+\log_2 x \geq 5+\log_2 (x-6)$ tenha significado, em $\mathbb{R}$, é necessário que $x>0$ e que $x-6>0$

$$x>0 \wedge x-6>0 \Leftrightarrow x>6 \Leftrightarrow x \in \left]6,+\infty\right[$$

No intervalo $\left]6,+\infty\right[$, tem-se:

$$3+\log_2 x \geq 5+\log_2 (x-6) \Leftrightarrow \log_2 x \geq 2+\log_2 (x-6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x \geq \log_2 4+\log_2 (x-6) \Leftrightarrow \log_2 x \geq \log_2 (4x-24) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \geq 4x-24 \Leftrightarrow -3x \geq -24 \Leftrightarrow x \leq 8$$

Portanto, o conjunto dos números reais que verificam a condição dada é $\left]-\infty,8\right] \cap \left]6,+\infty\right[= \left]6,8\right]$

2.2. Tem-se:

$$f(40^{1000})-f(5^{1000})=3+\log_2(40^{1000})-3-\log_2(5^{1000})=$$
$$=\log_2(40^{1000})-\log_2(5^{1000})=1000\log_2(40)-1000\log_2(5)=1000\big(\log_2(40)-\log_2(5)\big)=$$
$$=1000\log_2\left(\frac{40}{5}\right)=1000\log_2(8)=1000\times 3=3000$$

2.3. $g(x) = x + f(x) = x + 3 + \log_2 x$

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo que é contínua em $[1, 2]$

Tem-se:

- $g(1) = 1 + 3 + \log_2(1) = 1 + 3 + 0 = 4$
- $g(2) = 2 + 3 + \log_2(2) = 2 + 3 + 1 = 6$

Portanto, $g(1) < 5 < g(2)$

Logo, o teorema de Bolzano permite garantir que $\exists c \in \,]1, 2[\, : g(c) = 5$

3.1. Comecemos por determinar o número de frangos infetados no instante em que o vírus foi detetado.

$$f(0) = \frac{400}{1 + 3 \times 2^3} = \frac{400}{25} = 16$$

Determinemos, agora, ao fim de quantos dias o número de frangos infetados foi dez vezes maior do que 16, ou seja, 160

$$f(x) = 160 \Leftrightarrow \frac{400}{1 + 3 \times 2^{3-0,2x}} = 160 \Leftrightarrow \frac{400}{160} = 1 + 3 \times 2^{3-0,2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 \times 2^{3-0,2x} = 2{,}5 \Leftrightarrow 2^{3-0,2x} = \frac{1{,}5}{3} \Leftrightarrow 2^{3-0,2x} = 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3-0,2x} = 2^{-1} \Leftrightarrow 3 - 0{,}2x = -1 \Leftrightarrow -0{,}2x = -4 \Leftrightarrow x = 20$$

Portanto, tinham passado 20 dias, desde o instante em que o vírus foi detetado.

3.2. Comecemos por determinar o número de frangos infetados quinze dias após o vírus ter sido detetado.

$$f(15) = \frac{400}{1 + 3 \times 2^{3-0,2\times 15}} = 100$$

Assim, quinze dias após o vírus ter sido detetado, existiam no aviário 100 frangos infetados e 400 frangos não infetados, ou seja, havia um total de 500 frangos.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o frango escolhido estar infetado» B: «o teste dar negativo»

Pretendemos calcular $P(A \mid \overline{B})$

Sabemos que $P(\overline{B} \mid A) = 0{,}90$ e $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}96$

Por outro lado, como ao fim de 15 dias após o vírus ter sido detetado existem 100 frangos infetados, tem-se $P(A) = \frac{100}{500} = 0{,}2$ e $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Tem-se:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B} \mid A) = 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}18$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B \mid \overline{A}) = 0{,}8 \times 0{,}96 = 0{,}768$$

	A	$\overline{A}$	
B		$0{,}768$	
$\overline{B}$	$0{,}18$		
	$0{,}2$	$0{,}8$	1

Continuando a preencher as células da tabela necessárias à resolução do problema, vem

	A	$\overline{A}$	
B		0,768	
$\overline{B}$	0,18	0,032	0,212
	0,2	0,8	1

Portanto,

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}18}{0{,}212} \approx 0{,}849$$

Em vez de considerarmos probabilidades, poderíamos elaborar uma tabela com base no número de frangos, tendo-se, então,

	A	$\overline{A}$	
B		$400 \times 0{,}96$	
$\overline{B}$	$100 \times 0{,}9$		
	100	400	500

Continuando a preencher as células necessárias à resolução do problema, vem

	A	$\overline{A}$	
B		384	
$\overline{B}$	90	16	106
	100	400	500

E, portanto, $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{\frac{90}{500}}{\frac{106}{500}} \approx 0{,}849$

4. Tem-se:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(k + xe^x\right) = \lim_{x \to -\infty} k + \lim_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) =$$

$$= k + \lim_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) = k + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}}\right)$$

Seja $y = -x$. Como $x \to -\infty$, tem-se $y \to +\infty$

Então,

$$k + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = k + \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{y}{e^y}\right) = k - \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= k - \frac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}} = k - \frac{1}{+\infty} = k - 0 = k$$

Portanto, a reta de equação $y = k$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

Tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 3 + 0 = 3$$

A reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

Portanto, para que as duas assíntotas sejam coincidentes, k tem de ser igual a 3