Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 17.01.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada item, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera estar correcta.
- Se apresentar mais do que uma letra, a classificação será de zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

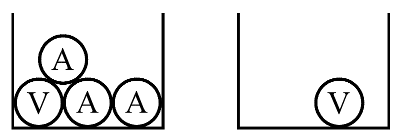
1. De um número real x sabe-se que $\log_5(x) = \pi - 1$

Indique o valor de $5\,x$

(A) $25^{\pi-1}$ **(B)** $5^{\pi-1}$ **(C)** 5^{π} **(D)** $5\,(\pi-1)^5$

2. Uma caixa 1 tem uma bola verde e três bolas amarelas.

Uma caixa 2 tem apenas uma bola verde.



Caixa 1 Caixa 2

Considere a experiência que consiste em tirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa 1, colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, também ao acaso, uma bola da caixa 2.

Sejam M e V os acontecimentos:

M : «*as bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor*»

V : «*a bola retirada da caixa 2 é verde*»

Indique o valor da probabilidade condicionada $P\,(V \mid \overline{M}\,)$

(Não necessita de recorrer à fórmula da probabilidade condicionada)

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 1

3. Os códigos dos cofres fabricados por uma certa empresa consistem numa sequência de cinco algarismos como, por exemplo, $0\,7\,7\,5\,7$

Um cliente vai comprar um cofre a esta empresa. Ele pede que o respectivo código satisfaça as seguintes condições:

- tenha exactamente três algarismos 5
- os restantes dois algarismos sejam diferentes
- a soma dos seus cinco algarismos seja igual a dezassete

Quantos códigos diferentes existem satisfazendo estas condições?

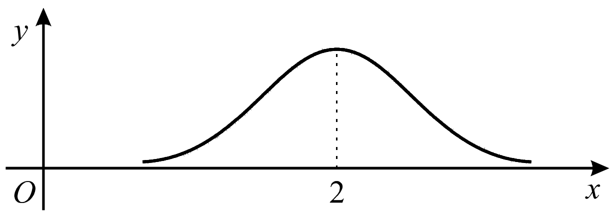
(A) 20 **(B)** 40 **(C)** 60 **(D)** 80

4. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 31.

Qual é o quinto elemento da linha anterior?

(A) $23\,751$ **(B)** $28\,416$ **(C)** $31\,465$ **(D)** $36\,534$

5. A Curva de Gauss representada na figura está associada a uma variável aleatória X, com distribuição Normal.



Tal como a figura sugere, a curva é simétrica relativamente à recta de equação $x = 2$

Para um certo valor de a, tem-se que $P\,(X > a) = 15\%$

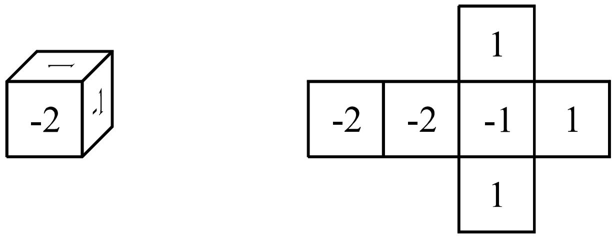
Qual dos seguintes pode ser o valor de a?

(A) 1 **(B)** $1{,}5$ **(C)** 2 **(D)** $2{,}5$

Grupo II

> Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.
>
> **Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura está representado um dado equilibrado e a respectiva planificação.



Lança-se este dado uma única vez.
Seja X o número escrito na face que fica voltada para cima.
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e, seguidamente, determine, **sem recorrer à calculadora**, o valor médio desta variável.
Apresente o valor médio na forma de fracção irredutível.

2. Doze amigos vão passear, deslocando-se num automóvel e numa carrinha, ambos alugados. O automóvel dispõe de cinco lugares: o do condutor e mais quatro. A carrinha dispõe de sete lugares: o do condutor e mais seis.
Apenas dois elementos do grupo, a Filipa e o Gonçalo, têm carta de condução, podendo qualquer um deles conduzir, quer o automóvel, quer a carrinha.

2.1. Os doze amigos têm de se separar em dois grupos, de modo a que um grupo viaje no automóvel e o outro na carrinha.
De quantas maneiras diferentes podem ficar constituídos os dois grupos de amigos?

2.2. Admita agora que os doze amigos já se encontram devidamente instalados nos dois veículos. O Gonçalo vai a conduzir a carrinha.
Numa operação STOP, a Brigada de Trânsito mandou parar cinco viaturas, entre as quais a carrinha conduzida pelo Gonçalo.
Se a Brigada de Trânsito escolher, ao acaso, dois dos cinco condutores para fazer o teste de alcoolémia, qual é a probabilidade de o Gonçalo ter de fazer o teste? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula.
Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada e as propriedades das operações com conjuntos, prove que

$$P\left(\left(\overline{\overline{A}\cap B}\right) \middle| B\right) = P(A|B)$$

4. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte **lei**: o número de indivíduos da população, t dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = a\,e^{k\,t} \qquad (\,t \in \mathbb{R}_0^+\,)$$

em que

- a é o número de indivíduos da população no instante inicial $(\,a > 0\,)$
- k é uma constante real

4.1. Seja r um número real positivo.
Considere que, ao fim de n dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a r vezes o número de indivíduos que existiam no referido instante inicial.

Mostre que se tem $k = \dfrac{\ln(r)}{n}$ $\quad$ $(\,\ln$ designa logaritmo de base $e\,)$

4.2. Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram

- 500 indivíduos de uma estirpe A
- 500 indivíduos de uma estirpe B

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.

As condições da cultura são desfavoráveis para a estirpe A, mas são favoráveis para a estirpe B. De facto,

- decorrido exactamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos
- decorridos exactamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos

4.2.1. Quer a estirpe A, quer a estirpe B, evoluíram de acordo com a **lei** acima referida. No entanto, o valor da constante k para a estirpe A é diferente do valor dessa constante para a estirpe B.
Utilizando a igualdade da alínea 4.1, verifique que:

- no caso da estirpe A, o valor da constante k, com quatro casas decimais, é $k_A = -0{,}6931$
- no caso da estirpe B, o valor da constante k, com quatro casas decimais, é $k_B = 0{,}1155$

4.2.2. Durante a primeira semana, houve um momento em que o **número total** de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo.
Utilizando os valores k_A e k_B referidos na alínea anterior e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o **dia e a hora** em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades).
Apresente, na sua resposta:

- a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
- o gráfico dessa função, para $t \in [0, 7]$, no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
- a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I .... **50 pontos**

Cada resposta certa .... 10 pontos
Cada resposta errada... 0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .... 0 pontos

Grupo II .... **150 pontos**

1. .... 21 pontos

2. .... 42 pontos
2.1. .... 21 pontos
2.2. .... 21 pontos

3. .... 25 pontos

4. .... 62 pontos
4.1. .... 20 pontos
4.2. .... 42 pontos
4.2.1. .... 20 pontos
4.2.2. .... 22 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 17.01.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

COTAÇÕES

GRUPO I .... **50 pontos**

Cada resposta certa .... 10 pontos

Cada resposta errada .... 0 pontos

Cada item não respondido ou anulado .... 0 pontos

GRUPO II .... **150 pontos**

1. .... 21 pontos

2. .... 42 pontos

2.1. .... 21 pontos

2.2. .... 21 pontos

3. .... 25 pontos

4. .... 62 pontos

4.1. .... 20 pontos

4.2. .... 42 pontos

4.2.1. .... 20 pontos

4.2.2. .... 22 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Situação	Classificação
1. Engano na identificação do item a que o aluno está a responder. **2.** Omissão da identificação do item a que o aluno está a responder.	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o aluno não indica, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada.	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de resposta.
4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
5. Ilegibilidade da resposta.	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
6. Item com etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual eventualmente se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.
7. Etapa com passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
8. Item ou etapa cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho.	O classificador deve enquadrar a resposta do aluno numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das cotações indicadas.
9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [Exemplo: «usando métodos analíticos»].	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.

10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.	O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos. Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no Programa.
11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.	A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.
12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, subtrair um ponto na cotação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
13. Erro ocasional num cálculo.	Subtrair um ponto à cotação da etapa em que ocorre o erro.
14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.
15. Erro na resolução de uma etapa.	A resolução desta etapa é classificada de acordo com o erro cometido. Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação. Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O aluno não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.	Subtrair um ponto à classificação total do item.
17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [Exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o aluno escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o aluno apresenta-o em metros].	Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.

18. Na apresentação do resultado final não está expressa a unidade de medida [Exemplo: «15» em vez de «15 metros»]	A etapa relativa ao resultado final é classificada tal como se a unidade de medida estivesse indicada.
19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.
20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.	Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.
21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	Subtrair um ponto à classificação total do item, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Critérios específicos

1. 21

Tabela de distribuição de probabilidades 11

  Valores que a variável X pode assumir 2

  Probabilidades **(ver nota 1)** .... (3+3+3) 9

Cálculo do valor médio 10

  Expressão que dá o valor médio... 8

  Resultado final **(ver nota 2)** 2

Notas:

1. Se, em vez de valores exactos, o aluno apresentar valores aproximados, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto por cada valor aproximado apresentado.

2. A classificação desta etapa só pode ser atribuída se a anterior (expressão que dá o valor médio) não tiver sido classificada com 0 (zero) pontos.
   Se o resultado final estiver correcto, mas não estiver apresentado na forma de fracção irredutível, esta etapa deve ser classificada com 1 ponto.

2.1. 21

Expressão que dá o valor pedido **(ver notas 1, 2 e 3)**..................................... 19

Resultado final **(ver nota 4)**.. 2

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do aluno, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir (considerou-se em primeiro lugar a escolha dos ocupantes do automóvel, ficando os ocupantes da carrinha univocamente determinados; caso o aluno considere em primeiro lugar a escolha dos ocupantes da carrinha, cabe ao professor adaptar a lista que a seguir se apresenta).

   $2 \times {}^{10}C_4$ (ou equivalente) 19

   ${}^{10}C_4$ (ou equivalente) 12

   $2 \times {}^{10}C_5$, $2 \times {}^{12}C_4$, $2 \times {}^{12}C_5$,
   $2 \times {}^{11}C_4$, $2 \times {}^{11}C_5$ (ou equivalente) 7

   $2 \times {}^{10}C_4 \times {}^{10}C_6$ (ou equivalente)... 4

   ${}^{10}C_5$, ${}^{12}C_4$, ${}^{12}C_5$, ${}^{11}C_4$, ${}^{11}C_5$ (ou equivalente)....................................2

2. A resposta $2 \times {}^{10}A_4 \times 6!$ (ou equivalente), que corresponde à interpretação (incorrecta) de que é relevante o lugar ocupado por cada um dos amigos nos dois veículos, deve ser classificada com 12 pontos.
Qualquer outra resposta envolvendo arranjos, em vez de combinações, que não seja numericamente equivalente a uma das respostas referidas na nota 1, deve ser classificada com 0 (zero) pontos.

3. Caso a resposta do aluno não esteja prevista nas notas 1 e 2, mas corresponda a um desempenho que se enquadre entre duas situações previstas na nota 1, a classificação a atribuir deve ser a que está indicada para a situação que, das duas, tem menor pontuação. Se a resposta do aluno revelar um desempenho inferior à última situação prevista na nota 1, a classificação a atribuir deverá ser de 0 (zero) pontos.

4. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com 0 (zero) pontos.

2.2. .... **21**

Expressão que dá o valor pedido **(ver nota 1)**.. 19

Resultado final **(ver nota 2)**.. 2

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do aluno, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

$\frac{4}{{}^5C_2}$, $\frac{1\times4\times2}{5\times4}$, $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$ (ou equivalente) 19

$\frac{4}{5\times4}$ (ou equivalente) 12

$\frac{1}{{}^5C_2}$ (ou equivalente)... 12

Outras fracções próprias com denominador ${}^5C_2$ ou 5×4........................6

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com 0 (zero) pontos.

3. .... **25**

A resolução deste item envolve os seguintes pontos:
- Leis de De Morgan
- Fórmula da probabilidade condicionada
- Propriedade distributiva da intersecção em relação à união de conjuntos
- Intersecção de um conjunto com o seu complementar
- Conjunto vazio como elemento neutro da união de conjuntos

A classificação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:

O aluno demonstra correctamente o pretendido 25

O aluno executa correctamente os cinco pontos, mas não demonstra o pretendido 20

O aluno executa correctamente quatro pontos 16

O aluno executa correctamente três pontos 12

O aluno executa correctamente dois pontos 8

O aluno executa correctamente um ponto 4

4.1. .... **20**

Equacionar o problema ($P(n) = r\ P(0)$ ou equivalente) 8

Resolver a equação em ordem a k 12

$a\, e^{kn} = r\, a \;\Leftrightarrow\; e^{kn} = r$ 3

$e^{kn} = r \;\Leftrightarrow\; kn = \ln\,(r)$ 6

$kn = \ln\,(r) \;\Leftrightarrow\; k = \dfrac{\ln\,(r)}{n}$ 3

4.2.1. .... **20**

Reconhecer que $r = \dfrac{1}{2}$ e $n = 1$, no caso da estirpe A ....(3 + 3) 6

Escrever $k_A = \dfrac{\ln(1/2)}{1}$ (ou equivalente) 3

Confirmar que $k_A = -0{,}6931$ 1

Reconhecer que $r = 2$ e $n = 6$, no caso da estirpe B .... (3 + 3) 6

Escrever $k_B = \dfrac{\ln\,(2)}{6}$ (ou equivalente) 3

Confirmar que $k_B = 0,1155$ 1

4.2.2. .... **22**

Expressão da função que dá o número total de indivíduos das duas estirpes, ao fim de n dias **(ver nota 1)** 8

Apresentação do gráfico da função **(ver notas 2 e 3)** 5

Valor do minimizante **(ver nota 4)**... 4

Concluir que o mínimo foi atingido no dia 3, às 5 horas.. 5

$2{,}216 = 2 + 0{,}216$.. 2

$0{,}216 \times 24 \approx 5$...2

Conclusão 1

ou

$2{,}216 \times 24 \approx 53$...2

Conclusão 3

Notas:

1. Se a expressão apresentada pelo aluno não for a correcta, esta etapa deve ser classificada com 0 (zero) pontos.

2. Se o gráfico apresentado pelo aluno não se enquadrar no contexto do problema (por exemplo, se intersectar o eixo das abcissas ou se o ponto de ordenada mínima não estiver no interior do intervalo $[0, 7]$), a classificação a atribuir a esta etapa e a todas as subsequentes deverá ser de 0 (zero) pontos.

3. Se o gráfico apresentado pelo aluno for o correcto ou, não o sendo, se se enquadrar no contexto do problema, a classificação a atribuir à apresentação do gráfico deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

- Gráfico de acordo com a expressão apresentada
- Respeito pelo domínio $[0, 7]$
- Ponto de ordenada mínima devidamente assinalado 5

- Gráfico de acordo com a expressão apresentada
- Desrespeito pelo domínio $[0, 7]$
- Ponto de ordenada mínima devidamente assinalado 3

- Gráfico de acordo com a expressão apresentada
- Respeito pelo domínio $[0, 7]$
- Ponto de ordenada mínima não assinalado ou indevidamente assinalado 2

- Gráfico de acordo com a expressão apresentada
- Desrespeito pelo domínio $[0, 7]$
- Ponto de ordenada mínima não assinalado ou indevidamente assinalado 1

- Outras situações 0

4. A classificação a atribuir à apresentação do minimizante deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

<u>1º caso</u>: valor com três casas decimais

Valor igual a $2{,}216$ 4

Valor diferente de $2{,}216$ mas pertencente ao intervalo $[2{,}211\,;\ 2{,}221]$ 3

Valor não pertencente ao intervalo anterior mas pertencente ao intervalo $[2{,}201\,;\ 2{,}231]$ 2

Valor não pertencente ao intervalo anterior mas pertencente ao intervalo $[2{,}191\,;\ 2{,}241]$ 1

Outros valores.. 0

<u>2º caso</u>: valor com mais de três casas decimais

Valor pertencente ao intervalo $[2{,}2160\,;\ 2{,}2162]$ 3

Valor não pertencente ao intervalo anterior mas pertencente ao intervalo $[2{,}211\,;\ 2{,}221]$ 2

Valor não pertencente ao intervalo anterior mas pertencente ao intervalo $[2{,}201\,;\ 2{,}231]$ 1

Outros valores.. 0

<u>3º caso</u>: valor com duas casas decimais

Valor igual a $2{,}21$ ou $2{,}22$ 2

Valor igual a $2{,}20$ ou $2{,}23$ 1

Outros valores.. 0

<u>4º caso</u>: valor com menos de duas casas decimais

Valor igual a $2{,}2$ 1

Outros valores.. 0

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. Tem-se $\log_5(x) = \pi - 1 \Leftrightarrow x = 5^{\pi-1}$

Portanto, $5x = 5 \times 5^{\pi-1} = 5^{1+\pi-1} = 5^{\pi}$

Resposta **C**

2. $P(V \mid \overline{M})$ designa «*probabilidade de a bola retirada da caixa 2 ser verde, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 têm cores diferentes*».

Como as bolas retiradas da caixa 1 têm cores diferentes, uma é verde e a outra é amarela. Ao colocá-las na caixa 2, esta caixa fica então com duas bolas verdes, num total de três bolas. A probabilidade pedida é, portanto, igual a $\frac{2}{3}$

Resposta **C**

3. De acordo com as condições do enunciado, o código terá de ter, na sua constituição, três algarismos 5, um algarismo 0 e um algarismo 2.

Existem ${}^5C_3$ maneiras diferentes de escolher três das cinco posições possíveis para colocar os três algarismos 5. Para cada uma destas, existem duas maneiras diferentes de colocar os outros dois algarismos.

A resposta é, portanto, ${}^5C_3 \times 2 = 10 \times 2 = 20$

Resposta **A**

4. A soma dos dois últimos elementos de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos dois primeiros elementos dessa mesma linha.

Sendo a soma dos dois primeiros elementos igual a 31, podemos concluir que o segundo elemento é 30, pelo que a linha em causa contém os elementos da forma ${}^{30}C_k$

Assim, o quinto elemento da linha anterior é ${}^{29}C_4$, ou seja, $23\,751$

Resposta **A**

5. Tem-se:

- $P(X > 1)$ é superior a 50%, o mesmo acontecendo a $P(X > 1{,}5)$
- $P(X > 2)$ é igual a 50%

Logo, $a = 2{,}5$

Resposta **D**

Grupo II

1. A tabela de distribuição de probabilidades é

x_i	-2	-1	1
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

O valor médio da variável aleatória X é

$$\mu = -2\times\frac{2}{6} + (-1)\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{3}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2.1. Comecemos por observar que, uma vez escolhidas as cinco pessoas que vão viajar no automóvel, o grupo que vai viajar na carrinha fica univocamente determinado.
Podemos pensar na escolha das cinco pessoas que vão viajar no automóvel como um processo com duas etapas:
1.ª etapa: escolha do condutor, para a qual existem duas hipóteses;
2.ª etapa: escolha dos restantes quatro ocupantes, para a qual existem ${}^{10}C_4$ hipóteses.
Existem, portanto, $2\times{}^{10}C_4$, ou seja, 420 maneiras diferentes de os dois grupos de amigos ficarem constituídos.

2.2. Número de casos possíveis: ${}^{5}C_2$ (dos cinco condutores, escolhem-se dois).
Número de casos favoráveis: 1×4 (o Gonçalo e um dos outros quatro condutores).
Probabilidade pedida: $\frac{4}{{}^{5}C_2} = \frac{2}{5}$

3. Tem-se:

$$P\left(\left(\overline{\overline{A}\cap B}\right)\big|\, B\right) = P\left((A\cup\overline{B})\,\big|\, B\right) = \frac{P\left((A\cup\overline{B})\cap B\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P\left((A\cap B)\cup(\overline{B}\cap B)\right)}{P(B)} = \frac{P\left((A\cap B)\cup\emptyset\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

4.1. Dizer que, ao fim de n dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a r vezes o número de indivíduos que existiam no instante inicial, é o mesmo que dizer que $P(n) = r\,.\,P(0)$
Tem-se, assim:

$$P(n) = r\,.\,P(0) \Leftrightarrow a\,e^{kn} = r\,.\,a \Leftrightarrow e^{kn} = r \Leftrightarrow k\,n = \ln(r) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(r)}{n}$$

4.2.1. Tem-se:

- decorrido exactamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos, pelo que, para $n = 1$, vem $r = \frac{1}{2}$ (250 é metade de 500).

  Portanto, $k_A = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$

  Donde, com a aproximação pedida, $k_A = -0{,}6931$

- decorridos exactamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos, pelo que, para $n = 6$, vem $r = 2$ (1000 é o dobro de 500).

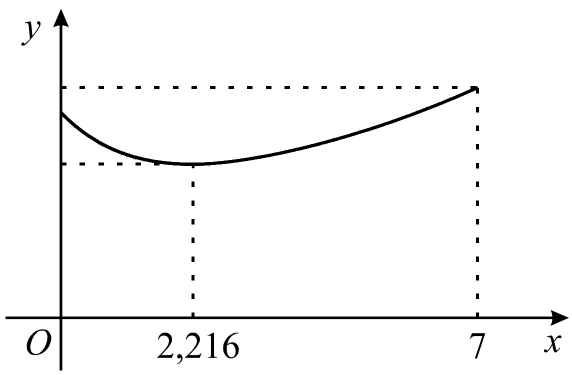
  Portanto, $k_B = \dfrac{\ln(2)}{6}$

  Donde, com a aproximação pedida, $k_B = 0{,}1155$

4.2.2. O número total de indivíduos das duas estirpes, existentes na cultura, t dias após as zero horas do dia 1 do corrente mês, é dado por

$$f(t) = 500\, e^{-0{,}6931\, t} + 500\, e^{0{,}1155\, t}$$

Em baixo está representado o gráfico desta função, no intervalo $[0, 7]$, no qual está assinalado o ponto de ordenada mínima, bem com a respectiva abcissa, arredondada às milésimas, tal como é pedido no enunciado.



Assim, o número total de indivíduos das duas estirpes atingiu o valor mínimo passados 2,216 dias após as zero horas do dia 1 do corrente mês.

Como $2{,}216 = 2 + 0{,}216$ e $0{,}216 \times 24 \approx 5$, conclui-se que foi às cinco horas do dia 3 que foi atingido o número mínimo de bactérias na cultura.