

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 28.05.2008

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Nome do aluno \_\_\_\_\_

N.º \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

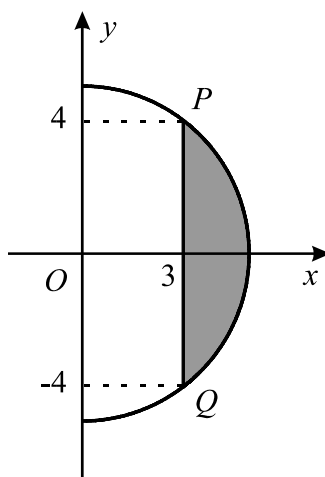
**Este teste contém um item cuja resolução é parcialmente feita no enunciado. Por este motivo, o enunciado deve ser entregue pelo aluno em conjunto com a sua folha de respostas.**

## Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Em  $\mathbb{R}$ , qual das condições seguintes é equivalente à inequação  $x^2 < 16$  ?
- (A)  $x < 16$             (B)  $x < 4$             (C)  $|x| < 16$             (D)  $|x| < 4$

2. Na figura está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , uma semicircunferência de centro na origem e que passa nos pontos  $P$  e  $Q$ .  
O ponto  $P$  tem coordenadas  $(3, 4)$  e o ponto  $Q$  tem coordenadas  $(3, -4)$ .  
Na figura está também representado o segmento de recta  $[PQ]$ .



Qual das condições seguintes define o domínio plano sombreado?

- (A)  $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -4 \leq y \leq 4$   
(B)  $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x \geq 3$   
(C)  $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge -4 \leq y \leq 4$   
(D)  $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge x \geq 3$

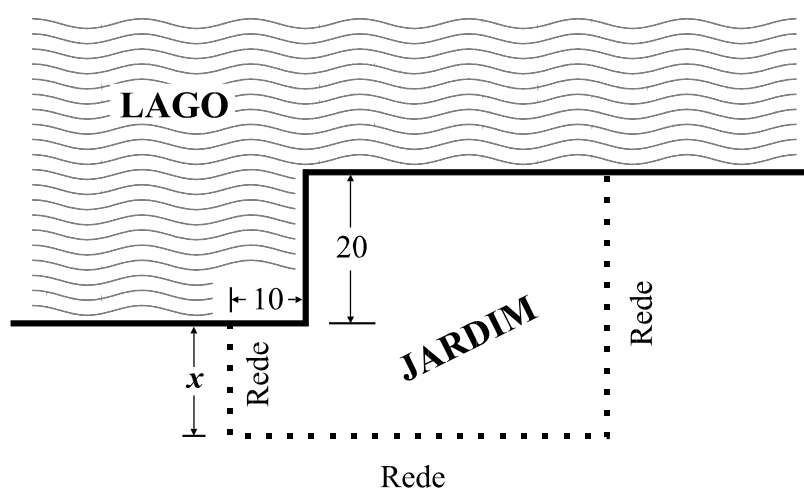


## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra. Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede. Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam sempre perpendiculares.



As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros.

Tal como a figura mostra,  $x$  é a medida de um dos lados do jardim.

Vão ser utilizados, na sua totalidade, 120 metros de rede.

- 1.1. Mostre que a área, em  $m^2$ , do jardim, é dada, em função de  $x$ , por

$$a(x) = -2x^2 + 60x + 1800$$

- 1.2. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de  $x$  para o qual é máxima a área do jardim e determine essa área máxima.

2. Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x$ . Sabe-se que o gráfico de  $f$  intersecta o eixo  $Ox$  em apenas dois pontos. Um deles tem abcissa  $-3$ .

- 2.1. Decomponha o polinómio  $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x$  num produto de três polinómios, sendo dois do primeiro grau e um do segundo grau.

- 2.2. O contradomínio de  $f$  é um intervalo da forma  $[a, +\infty[$ . **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, determine o valor de  $a$ , arredondado às décimas.

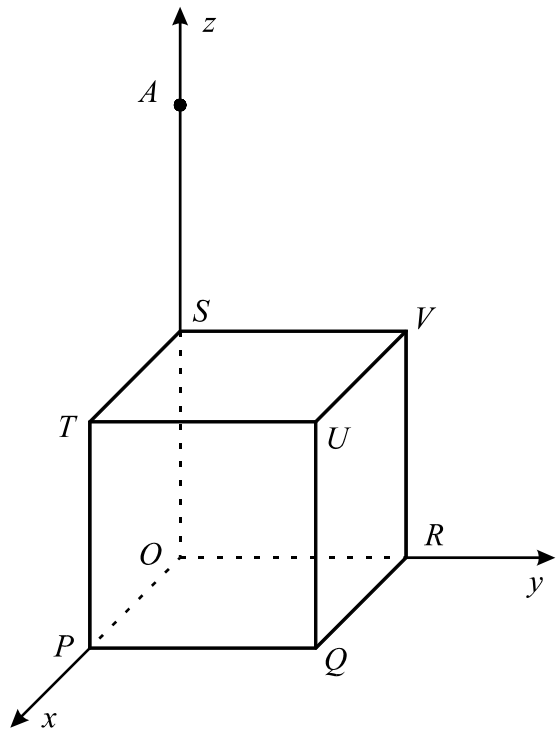
Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico de  $f$  visualizado na calculadora, depois de ter escolhido uma janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema proposto. Assinale esse ponto no seu gráfico.

3. Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cubo  $[OPQRSTUV]$

A aresta  $[OP]$  está contida no semieixo positivo  $Ox$ , a aresta  $[OR]$  está contida no semieixo positivo  $Oy$  e a aresta  $[OS]$  está contida no semieixo positivo  $Oz$ .

O ponto  $U$  tem coordenadas  $(2, 2, 2)$

No eixo  $Oz$  está representado um ponto  $A$ , cuja cota é 4



- 3.1. Defina, por meio de uma condição, a aresta  $[UV]$
- 3.2. Averigúe se o ponto  $V$  pertence ao plano mediador do segmento  $[AT]$
- 3.3. Na figura acima **desenhe**, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano  $PQA$  e, na sua folha de prova, **determine** a sua área.

**Nota importante:**

O seu desenho é feito no enunciado.

Por este motivo, escreva o seu nome no enunciado e entregue o enunciado em conjunto com a sua folha de respostas.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I ..... 50 pontos**

Cada resposta certa ..... 10 pontos  
Cada resposta errada..... 0 pontos  
Cada item não respondido ou anulado ..... 0 pontos

**Grupo II ..... 150 pontos**

**1. .... 45 pontos**

1.1. .... 25 pontos

1.2. .... 20 pontos

**2. .... 40 pontos**

2.1. .... 20 pontos

2.2. .... 20 pontos

**3. .... 65 pontos**

3.1. .... 20 pontos

3.2. .... 20 pontos

3.3. .... 25 pontos

**TOTAL ..... 200 pontos**

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 28.05.2008

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

### COTAÇÕES

<b>GRUPO I</b> .....	<b>50 pontos</b>
Cada resposta certa .....	10 pontos
Cada resposta errada .....	0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .....	0 pontos
<b>GRUPO II</b> .....	<b>150 pontos</b>
<b>1.</b> .....	<b>45 pontos</b>
<b>1.1.</b> .....	<b>25 pontos</b>
<b>1.2.</b> .....	<b>20 pontos</b>
<b>2.</b> .....	<b>40 pontos</b>
<b>2.1.</b> .....	<b>20 pontos</b>
<b>2.2.</b> .....	<b>20 pontos</b>
<b>3.</b> .....	<b>65 pontos</b>
<b>3.1.</b> .....	<b>20 pontos</b>
<b>3.2.</b> .....	<b>20 pontos</b>
<b>3.3.</b> .....	<b>25 pontos</b>
<b>TOTAL</b> .....	<b>200 pontos</b>

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

### Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

### Itens de resposta aberta

Situação	Classificação
<p>1. Engano na identificação do item a que o aluno está a responder.</p> <p>2. Omissão da identificação do item a que o aluno está a responder.</p>	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
<p>3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o aluno não indica, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada.</p>	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de resposta.
<p>4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.</p>	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
<p>5. Ilegibilidade da resposta.</p>	Deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
<p>6. Item com etapas.</p>	<p>A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual eventualmente se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.</p>
<p>7. Etapa com passos.</p>	<p>A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.</p>
<p>8. Item ou etapa cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho.</p>	O classificador deve enquadrar a resposta do aluno numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das cotações indicadas.
<p>9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [Exemplo: «usando métodos analíticos»].</p>	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.



<p><b>10.</b> Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.</p>	<p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p> <p>Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no Programa.</p>
<p><b>11.</b> Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.</p>	<p>A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.</p>
<p><b>12.</b> Transposição incorrecta de dados do enunciado.</p>	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, subtrair um ponto na cotação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p><b>13.</b> Erro ocasional num cálculo.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa em que ocorre o erro.</p>
<p><b>14.</b> Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.</p>	<p>A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.</p>
<p><b>15.</b> Erro na resolução de uma etapa.</p>	<p>A resolução desta etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação.</p> <p>Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
<p><b>16.</b> Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O aluno não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.</p>	<p>Subtrair um ponto à classificação total do item.</p>
<p><b>17.</b> A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [Exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o aluno escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o aluno apresenta-o em metros].</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>

<p><b>18.</b> Na apresentação do resultado final não está expressa a unidade de medida [Exemplo: «15» em vez de «15 metros»]</p>	<p>A etapa relativa ao resultado final é classificada tal como se a unidade de medida estivesse indicada.</p>
<p><b>19.</b> O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>
<p><b>20.</b> O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.</p>	<p>Subtrair um ponto à cotação da etapa correspondente ao resultado final.</p>
<p><b>21.</b> Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.</p>	<p>Subtrair um ponto à classificação total do item, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se as correcções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos;</li> <li>– no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## Critérios específicos

### 1.1. .... 25

Expressar, em função de  $x$ , o comprimento do lado do jardim que é oposto ao lado que tem comprimento  $x$  ..... 4

Expressar, em função de  $x$ , o comprimento do terceiro lado com rede ..... 8

Expressar, em função de  $x$ , a área do jardim ..... 8

Simplificar a expressão obtida na etapa anterior, obtendo  $a(x)$  ..... 5

### 1.2. .... 20

Determinar a abcissa do vértice ..... 9

Determinar a ordenada do vértice ..... 9

Resposta ..... 2

### 2.1. .... 20

Concluir que  $-3$  é um zero do polinómio ..... 4

Dividir o polinómio por  $x + 3$  ..... 8

Pôr a variável  $x$  em evidência.....4

Resposta .....4

### 2.2. .... 20

Apresentar o gráfico nas condições pedidas no enunciado ..... 7

Assinalar o ponto de ordenada mínima ..... 6

Escrever o valor de  $a$  (**ver nota**).....7

#### Nota

A escrita do valor de  $a$  deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta  $-14,2$  ..... 7

Resposta  $-14,3$  ou  $-14,1$  ..... 4

Outras respostas .....0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo $[-14,25 ; -14,17]$ .....	5
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[-14,30 ; -14,12]$ .....	3
Outras respostas .....	0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Resposta $-14$ .....	2
Outras respostas .....	0

**3.1. .... 20**

Escrever uma condição cartesiana que defina a recta  $UV$  ..... 10

Escrever uma condição que defina o conjunto de pontos cuja  
abscissa está compreendida entre 0 e 2, inclusive ..... 6

Escrever a conjunção das duas condições ..... 4

**ou**

Determinar as coordenadas de um vector director da recta  $UV$  ..... 5

Escrever uma equação vectorial da recta  $UV$  ..... 5

Indicar o intervalo de variação do parâmetro ..... 10

**3.2. .... 20**

Determinar a distância de  $V$  a  $A$  ..... 8

Determinar a distância de  $V$  a  $T$  ..... 8

Conclusão ..... 4

**ou**

Escrever uma equação do plano mediador do segmento  $[AT]$ ..... 12

Verificar que as coordenadas de  $V$  satisfazem a equação do plano..... 6

Conclusão ..... 2

**3.3. .... 25**

Desenhar a secção ( <b>ver nota</b> ) .....	15
Determinar o comprimento do lado contido no segmento $[AP]$ .....	7
Resposta .....	3

**Nota**

O desenho deve ser um quadrilátero em que três dos seus vértices são os pontos  $P$ ,  $Q$  e o ponto médio de  $[ST]$  (ponto de intersecção de  $AP$  com  $ST$ ). O quarto vértice deve pertencer ao segmento  $[UV]$ .

Se o desenho cumprir as condições enunciadas, a classificação a atribuir a esta etapa deve estar de acordo com o seguinte critério:

O quarto vértice está na posição correcta (ponto médio de $[UV]$ ) .....	15
O quarto vértice está desviado da posição correcta, sendo o desvio inferior ou igual a 2 mm .....	12
O quarto vértice está desviado da posição correcta, sendo o desvio superior a 2 mm, mas inferior ou igual a 4 mm .....	5
Outras situações .....	0

Se o desenho não cumprir as condições enunciadas, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser de zero pontos.

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

---

### Grupo I

1. Tem-se:  $x^2 < 16 \Leftrightarrow x > -4 \wedge x < 4 \Leftrightarrow |x| < 4$  Resposta D

2. A distância do ponto  $P(3, 4)$  à origem é  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .  
Portanto, a semicircunferência tem raio 5.  
O domínio plano sombreado é, portanto, a intersecção do círculo definido pela condição  $x^2 + y^2 \leq 25$  com o semiplano definido pela condição  $x \geq 3$

Resposta D

3. Os pontos de coordenadas  $(3, 0)$  e  $(0, 6)$  pertencem à recta  $r$ .  
Portanto, um vector director da recta  $r$  é o vector  $(3, 0) - (0, 6) = (3, -6)$ .  
Assim, o declive da recta  $r$  é  $-\frac{6}{3} = -2$

Resposta C

4. A esfera  $E$  tem centro na origem do referencial e raio igual a 2.  
A recta  $r$  contém o ponto  $(0, 0, 3)$  e é paralela ao eixo  $Oy$ .  
Portanto, a intersecção da esfera  $E$  com a recta  $r$  é o conjunto vazio

Resposta B

5. A média é igual a  $\frac{2 \times 0 + 1 \times 1 + 8 \times 2 + 10 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5}{2 + 1 + 8 + 10 + 2 + 1} =$   
 $= \frac{0 + 1 + 16 + 30 + 8 + 5}{24} = \frac{60}{24} = 2,5$

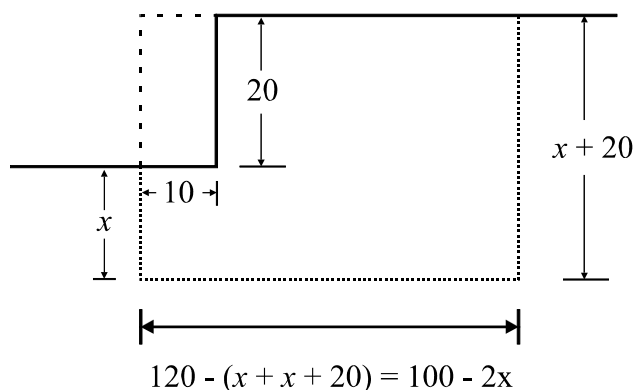
Resposta C

## Grupo II

**1.1.** Relativamente aos lados do jardim que não confinam com o lago, tem-se:

- um tem  $x$  metros de comprimento;
- o lado oposto tem  $x + 20$  metros de comprimento;
- o terceiro lado tem  $120 - (x + x + 20)$  metros de comprimento, pois a rede tem 120 metros.

Tem-se, assim, o seguinte esquema:



Portanto, a área, em  $m^2$ , do jardim, é dada, em função de  $x$ , por

$$\begin{aligned} a(x) &= (100 - 2x)(x + 20) - 10 \times 20 = \\ &= 100x + 2000 - 2x^2 - 40x - 200 \\ &= -2x^2 + 60x + 1800 \end{aligned}$$

**1.2.**  $y = -2x^2 + 60x + 1800$  define uma parábola.

Trata-se de encontrar as coordenadas do seu vértice.

$$\text{A abcissa é } -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{-4} = 15$$

A ordenada é a imagem da abcissa, ou seja, é

$$a(15) = -2 \times 225 + 60 \times 15 + 1800 = -450 + 900 + 1800 = 2250$$

A área do jardim é máxima para  $x = 15$ , sendo  $2250 m^2$  a área máxima.

- 2.1.** Como um dos pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$  tem abcissa  $-3$ , tal significa que  $-3$  é um zero de  $f$ .

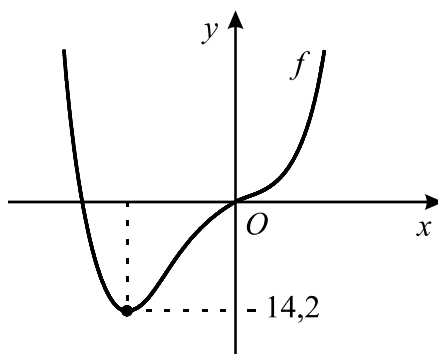
Portanto, o polinómio  $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x$  é divisível por  $x + 3$

Façamos a divisão, utilizando a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ & & -3 & 3 & -3 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x &= (x + 3)(x^3 - x^2 + x) = \\ &= (x + 3) \cdot x \cdot (x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

- 2.2.** Na figura seguinte está representada parte do gráfico de  $f$ .



Assinalou-se no gráfico o ponto de ordenada mínima.

Tem-se, assim,  $a \approx -14,2$

- 3.1.** A aresta  $[UV]$  está contida na recta de intersecção dos planos  $UVR$  e  $TUV$ , definidos, respectivamente, pelas equações  $y = 2$  e  $z = 2$ .

A aresta  $[UV]$  é o conjunto dos pontos desta recta que têm abcissa compreendida entre 0 e 2. Assim, uma condição que define a aresta  $[UV]$  é

$$y = 2 \wedge z = 2 \wedge 0 \leq x \leq 2$$



- 3.2.** Para que o ponto  $V$  pertença ao plano mediador do segmento  $[AT]$ , o ponto  $V$  tem de estar a igual distância de  $A$  e de  $T$ .

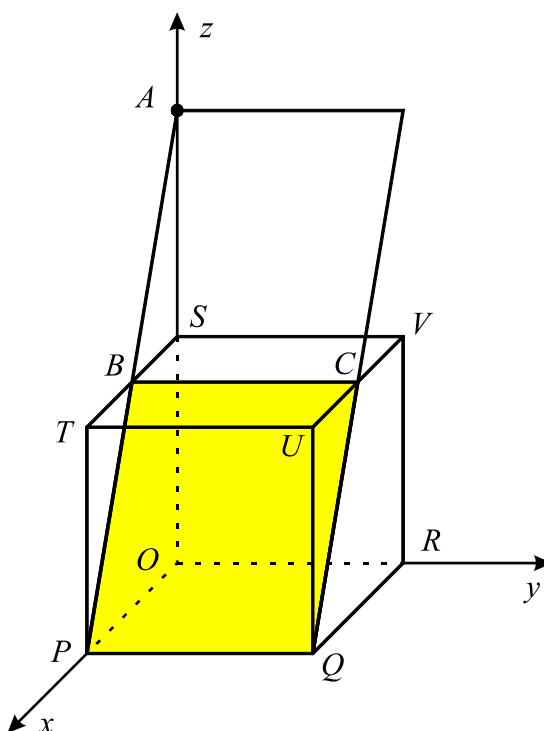
Para determinarmos a distância de  $V$  a  $A$  podemos ter em conta que as coordenadas de  $A$  são  $(0, 0, 4)$  e as de  $V$  são  $(0, 2, 2)$ .

A distância de  $V$  a  $A$  é, portanto, igual a  $\sqrt{(0-0)^2 + (0-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$

O segmento  $[TV]$  é uma diagonal de uma face do cubo, pelo que o seu comprimento é  $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Portanto, o ponto  $V$  pertence ao plano mediador do segmento  $[AT]$

- 3.3.** A secção produzida no cubo pelo plano  $PQA$  é o rectângulo colorido na figura.



Dois lados do rectângulo têm comprimento 2 (por serem iguais às arestas do cubo).

Para determinarmos o comprimento de cada um dos outros dois lados, podemos ter em conta que os triângulos  $[ABS]$  e  $[PTB]$  são iguais, pelo que  $\overline{BT} = 1$

Vem, então:  $\overline{BP}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{PT}^2 \Leftrightarrow \overline{BP}^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BP} = \sqrt{5}$

A área do rectângulo é, portanto,  $2\sqrt{5}$