

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 26.05.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \cdot \text{tgb}}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

-
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
 - Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
 - Não apresente cálculos, nem justificações.
 - Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
-

1. Para um certo número real a , a tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	a

Qual é o valor de a ?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$

2. Um saco contém quinze bolas, numeradas de 1 a 15

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas dessas quinze bolas e adicionam-se os respectivos números.

Qual é a probabilidade de a soma obtida ser igual a 7?

- (A) $\frac{1}{35}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{45}$ (D) $\frac{1}{50}$

3. Seja f uma função, de domínio \mathbb{R} , contínua no intervalo $[-4, 1]$

Tem-se $f(-4) = 9$ e $f(1) = 3$

Em qual das opções seguintes está definida uma função g , de domínio \mathbb{R} , para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $] -4, 1[$?

(A) $g(x) = 2x - f(x)$

(B) $g(x) = 2x + f(x)$

(C) $g(x) = x^2 - f(x)$

(D) $g(x) = x^2 + f(x)$

4. Na Figura 1, está o gráfico de uma função f cujo domínio é o intervalo $]1, 3[$

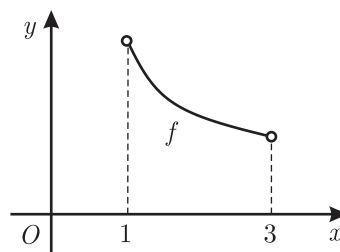


Figura 1

A função f tem primeira derivada e segunda derivada finitas em todos os pontos do seu domínio.

Seja $x \in]1, 3[$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$

(B) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$

(C) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$

(D) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$

5. Na Figura 2, está representada, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem O do referencial.

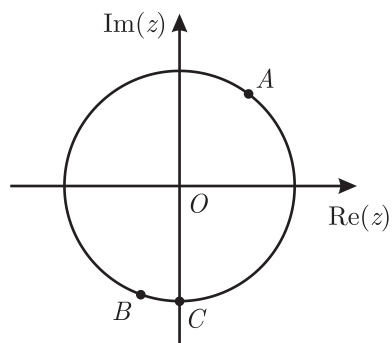


Figura 2

Os pontos A , B e C pertencem à circunferência.

O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $6 + 8i$

O ponto C pertence ao eixo imaginário.

O arco BC tem $\frac{\pi}{9}$ radianos de amplitude.

Qual é o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto B ?

- (A) $14 \operatorname{cis} \frac{10\pi}{9}$
- (B) $14 \operatorname{cis} \frac{25\pi}{18}$
- (C) $10 \operatorname{cis} \frac{10\pi}{9}$
- (D) $10 \operatorname{cis} \frac{25\pi}{18}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^3 - z^2 + 9z - 9 = 0$

Esta equação tem três soluções em \mathbb{C} , sendo uma delas o número real 1

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo.

Determine o perímetro desse triângulo.

Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

2. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{e^x - e} & \text{se } 0 < x < 1 \\ x e^{-x} + 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

2.1. Averigúe se a função f é contínua em $x = 1$

2.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

2.3. Resolva, no intervalo $[1, +\infty[$, a equação $\frac{f(x)}{x} = e^x + \frac{3}{2}$

3. Na Figura 3, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

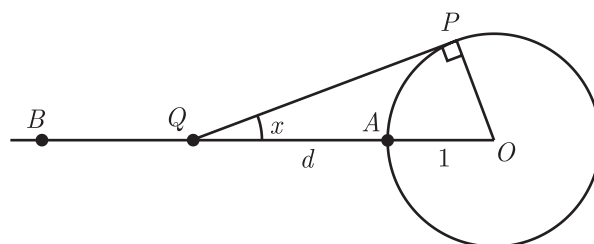


Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- os pontos O , A , e B são colineares;
- o ponto A está entre o ponto O e o ponto B
- o ponto Q desloca-se ao longo da semi-recta \overrightarrow{AB} , nunca coincidindo com o ponto A
- d é a distância do ponto A ao ponto Q
- para cada posição do ponto Q , o ponto P é um ponto da circunferência tal que a recta QP é tangente à circunferência;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo OQP ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Seja f a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por $f(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$

Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

3.1. Mostre que $d = f(x)$

3.2. Considere a seguinte afirmação: «Quanto maior é o valor de x , menor é o valor de d »

Averigüe a veracidade desta afirmação, começando por estudar a função f quanto à monotonia.

4. Seja f a função, de domínio $]0, 2[$, definida por $f(x) = x \ln x + \sin(3x)$

O ponto A pertence ao gráfico da função f

Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função f no ponto A tem declive 4

Determine a abcissa do ponto A

Na resolução deste item deve:

- traduzir o problema por uma equação;
- resolver graficamente essa equação, **recorrendo à calculadora**;
- indicar o valor pedido arredondado às centésimas.

Na sua resposta, deve reproduzir e identificar o gráfico, ou os gráficos, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, incluindo o referencial, e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s).

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade diferente de zero.

Prove que $P(A \cup B) < P(B | A) \times P(\bar{A}) \iff P(A) + P(B) < P(B | A)$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	<hr/>
	50 pontos

GRUPO II

1.	20 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	20 pontos
2.3.	20 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	20 pontos
4.	15 pontos
5.	20 pontos
	<hr/>
	150 pontos

TOTAL

200 pontos