Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2012

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Seja a um número real maior do que 1 e seja $b = a^{\pi}$

Qual é o valor, arredondado às unidades, de $\log_a \left(a^{12} \times b^{100}\right)$?

(A) 138 **(B)** 326 **(C)** 1238 **(D)** 3770

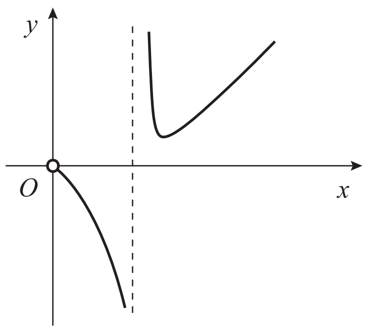
2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

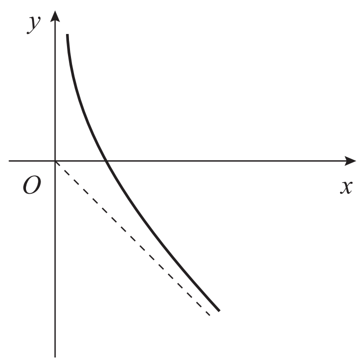
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- a bissetriz dos quadrantes ímpares é assíntota do gráfico de f

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função $\dfrac{1}{f}$?

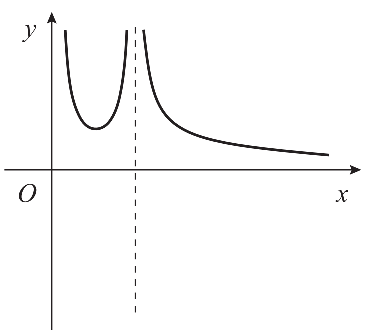
(A)



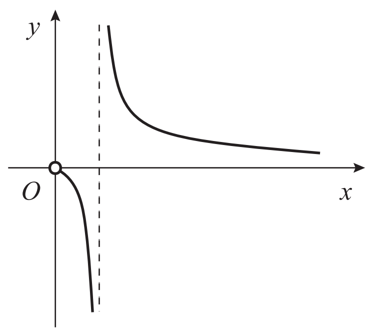
(B)



(C)



(D)



3. Relativamente a duas funções, f e g, sabe-se que:

- têm domínio $[2, 3]$
- são funções contínuas
- $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) Os gráficos de f e g intersectam-se em pelo menos um ponto.

(B) A função $f - g$ é crescente.

(C) Os gráficos de f e g não se intersectam.

(D) A função $f - g$ é decrescente.

4. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos em todos os anos de escolaridade.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «O aluno é do sexo feminino»

B: «O aluno está no 12.º ano»

Qual das expressões seguintes designa o acontecimento «o aluno é do sexo masculino e não está no 12.º ano»?

(A) $A \cap B$ **(B)** $\overline{A \cap B}$

(C) $A \cup B$ **(D)** $\overline{A \cup B}$

5. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OPQ]$ de altura $\sqrt{3}$

Tal como a figura sugere, o vértice O coincide com a origem do referencial, o vértice P pertence ao eixo imaginário e o vértice Q pertence ao 3.º quadrante.

Seja z o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto Q

Qual é a representação trigonométrica do número complexo z ?

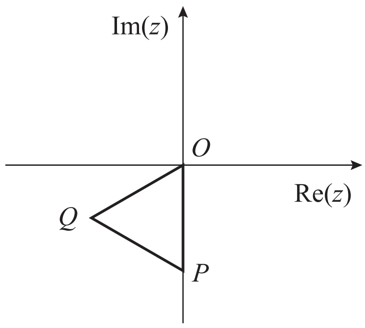


Figura 1

(A) $3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$

(B) $3 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$

(C) $2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$

(D) $2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Para um certo número inteiro k, a expressão $\dfrac{\left(\sqrt{2}\,i\right)^3 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{k+i}$ designa um número real.

Determine esse número k

2. Uma caixa, que designaremos por caixa 1, tem uma bola branca e duas bolas pretas.

2.1. Considere a experiência que consiste em tirar, ao acaso, uma bola da caixa 1, observar a sua cor e voltar a colocar a bola na caixa. Efetua-se esta experiência cinco vezes.

Qual é a probabilidade de sair bola preta pelo menos quatro vezes?

2.2. Outra caixa, que designaremos por caixa 2, tem três bolas brancas e quatro bolas pretas.

Realiza-se a seguinte experiência: ao acaso, tiram-se duas bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2; em seguida, tiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «As bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»

B: «As bolas retiradas da caixa 2 são da mesma cor»

Determine o valor de $P(\overline{B} \mid A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.

A sua composição deve contemplar:

- o significado de $P(\overline{B} \mid A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação do conteúdo da caixa 2 após a realização do acontecimento A
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade pedida.

3. Relativamente à Figura 2, sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ tem comprimento 4
- o ponto B é o ponto médio de $[AC]$
- o segmento de reta $[BD]$ é perpendicular a $[AC]$
- o arco de circunferência CD tem centro em B

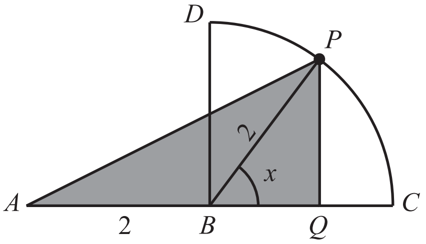


Figura 2

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD, nunca coincidindo com C nem com D, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$ de tal forma que $[PQ]$ é sempre perpendicular a $[BC]$

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja $A(x)$ a área do triângulo $[APQ]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

3.1. Mostre que $A(x) = 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,(2x) \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

3.2. Mostre que existe um valor de x para o qual a área do triângulo $[APQ]$ é máxima.

4. De uma certa função f sabe-se que:

- o seu domínio é $]1, +\infty[$
- a sua **derivada** é dada por $f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4\ln(x-1)$

4.1. Na Figura 3, estão representadas:

- parte do gráfico da função f
- a reta r que é tangente ao gráfico da função f no ponto A, de abcissa 2
- a reta s que é tangente ao gráfico da função f no ponto B

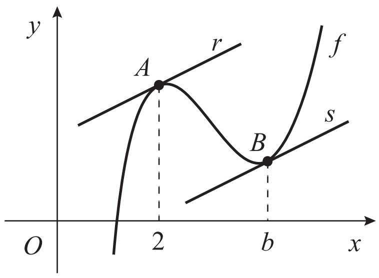


Figura 3

As retas r e s são paralelas.

Seja b a abcissa do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
- apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

4.2. Tal como a figura sugere, o gráfico da função f tem um ponto de inflexão.

Determine a abcissa desse ponto, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - 2e^2}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ \\ 3e^x + \ln(x-1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua em $x = 2$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	50 pontos

GRUPO II

1.	20 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	20 pontos
3.2.	20 pontos
4.	
4.1.	20 pontos
4.2.	20 pontos
5.	20 pontos
	150 pontos

TOTAL .... **200 pontos**